Ά. Κουκλάδας
Π. Γεωργιακάκης

# ΑΛΓΕΒΡΑ 3

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ
## ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1976

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ "ΚΥΚΛΟΣ"
ΜΑΥΡΟΚΟΡΔΑΤΟΥ 1 - 3
ΤΗΛ. 636.063 ΑΘΗΝΑ

Ά. Κουκλάδας
Π. Γεωργιακάκης

# ΑΛΓΕΒΡΑ 3

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1976

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ - ΜΟΝΟΤΥΠΙΑ Σ. ΛΕΝΗ - Α. ΡΑΛΛΗ
Καββαθᾶ 62 Γουδί - Ἀθήνα - Τηλ. 77.06.055

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

*Μὲ τὸν παρόντα τόμον τῆς Ἀλγέβρας, ὁλοκληρώνεται ἡ θεωρία ποὺ καλύπτει τὰ ἀπαραίτητα στοιχεῖα γνώσεων ἀπὸ τὰ Ἀνώτερα Μαθηματικὰ καὶ ἐπὶ τῶν κεφαλαίων τῆς* **Παραγώγου** *καὶ τοῦ* **Ὁλοκληρώματος.**

*Ἡ ἀνάπτυξις γίνεται κατὰ τρόπον ἁπλὸν καὶ μὲ πολλὰ παραδείγματα καὶ λελυμένες ἀσκήσεις διὰ τὴν ἐμπέδωσιν τῆς ὕλης.*

*Ἐλπίζομεν ὅτι διὰ τοῦ παρόντος προσφέρομεν σημαντικὴν βοήθειαν τόσον εἰς τοὺς διδασκομένους, ὅσον καὶ εἰς τοὺς διδάσκοντας, ποὺ θὰ εὕρουν τὰ ἀπαραίτητα μέσα διὰ μίαν καρποφόρον διδασκαλίαν.*

*Ἐὰν ἐπιτύχωμεν τοῦ σκοποῦ μας αὐτοῦ, αὐτὸ θὰ ἀποτελέση μεγάλην ἱκανοποίησιν καὶ ἀμοιβὴν τῶν κόπων καὶ τῶν θυσιῶν, ποὺ ἀπαιτεῖ σήμερον μία ἔκδοσις τοῦ εἴδους αὐτοῦ.*

*Οἱ συγγραφεῖς*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 12

# ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

## Α

ΟΡΙΣΜΟΙ
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### 12. 1 Εἰσαγωγικὸν σημείωμα

Ὅλαι αἱ μέχρι στιγμῆς ἀποκτηθεῖσαι γνώσεις, ἐπὶ τῆς ὁριακῆς τιμῆς μιᾶς συναρτήσεως εἰς ἕνα σημεῖον συσσωρεύσεως αὐτῆς καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς συνεχείας εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, εἶχον καὶ ἕνα ἄλλον βασικὸν σκοπόν, νὰ μᾶς εἰσαγάγουν εἰς ἕνα νέον κεφάλαιον, τὸ κεφάλαιον τῶν παραγώγων.

Ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως εἰς ἕνα σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της καὶ κατ᾽ ἐπέκτασιν ἡ σπουδὴ τῶν παραγωγισίμων συναρτήσεων ἀποτελεῖ τὸ βασικώτερον στοιχεῖον τῆς μελέτης μιᾶς συναρτήσεως λεπτομερειακῶς καὶ ἐπὶ πλέον παρουσιάζει ὁλόκληρον τὸ μεγαλεῖον τῆς Ἀναλύσεως ἀπὸ ἀπόψεως ἐφαρμογῶν.

Ὅπως θὰ εἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα, αἱ ἐφαρμογαὶ τῶν παραγώγων εἰς τὴν μελέτην διαφόρων θεμάτων γεωμετρίας, φυσικῆς κλπ. εἶναι τόσον ἐνδιαφέρουσαι, ὥστε νὰ ἀφήνουν ἔκπληκτον τὸν μελετητὴν πρὸ τοῦ ἀπεριορίστου τῆς ποικιλίας αὐτῶν.

### 12. 2 Ὁρισμοὶ καὶ μελέτη τῶν παραγωγισίμων συναρτήσεων

**Ὁρισμὸς 1.** *Μία συνάρτησις $f$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$ θὰ λέγωμεν, ὅτι παραγωγίζεται εἰς τὸ σημεῖον $\xi\in\Delta$, ὅπου $\xi$* **ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ**, *ἢ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τὸ $\xi\in\Delta$ ἢ ἔχει παράγωγον (πρώτην) εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\Delta$, ὅταν καὶ μόνον ὅταν ὑπάρχῃ τό:*

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

*καὶ εἶναι* **ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς λ.**

---

**Σημείωσις:** Γράφομεν ἁπλῶς Δ ἀντὶ $\mathcal{D}(f)$ ἐνῶ χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν γραφὴν $\mathcal{D}(f)$ διὰ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ.

*Συμβόλιζομεν τὸ* $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lambda \epsilon R$ *μὲ* $f'(\xi) = \lambda\epsilon R$ *καὶ τὸ διαβάζομεν ἡ πρώτη παράγωγος τῆς* $f$ *εἰς τὴν θέσιν* $x = \xi\epsilon\Delta$ *εἶναι* $\lambda\epsilon R$.

**Ὁρισμὸς 2.** *Ἐὰν ἡ συνάρτησις ἔχῃ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ* $\Delta = (\alpha, \xi]$ *καὶ ὑπάρχῃ τό:*

$$\lim_{x\to\xi-0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lambda\epsilon R$$

*Τότε λέγομεν, ὅτι ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς* $f$ *ἐξ ἀριστερῶν εἰς τὴν θέσιν* $x = \xi\epsilon\Delta$ *ἢ ὅτι ἡ* $f$ *παραγωγίζεται ἐξ ἀριστερῶν εἰς τὴν θέσιν* $x = \xi\epsilon\Delta$ *καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ:* $f'(\xi-0) = \lambda\epsilon R$.

**Ὁρισμὸς 3.** *Ἀναλόγως θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ* $f$ *παραγωγίζεται ἐκ δεξιῶν εἰς τὴν θέσιν* $x = \xi\epsilon\Delta$, *ὅπου* $\Delta = [\xi, \beta)$, *ὅταν καὶ μόνον ὅταν ὑπάρχῃ τό:*

$$\lim_{x\to\xi+0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lambda\epsilon R$$

*καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ* $f'(\xi+0) = \lambda\epsilon R$.

**Παρατηρήσεις**

**1.** Ἐὰν τὸ $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ εἶναι τὸ $+\infty$ ἢ τὸ $-\infty$, κάμνομεν τὴν ἀκόλουθον συμφωνίαν, λέγοντες ὅτι ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\Delta$ ($\xi$ ἐσωτερικὸν σημεῖον) ἀπειρίζεται θετικῶς, ἀντιστοίχως ἀρνητικῶς καὶ γράφομεν : $f'(\xi) = +\infty$, ἀντιστοίχως $f'(\xi) = -\infty$.

Ἀνάλογος συμφωνία γίνεται καὶ διὰ τὰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας εἶναι : $\Delta = (\alpha, \xi]$ ἢ $\Delta = [\xi, \beta)$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$f'(\xi-0) = +\infty$ ἢ $-\infty$ (ἀριστερὰ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\Delta$)

καὶ $f'(\xi+0) = +\infty$ ἢ $-\infty$ (δεξιὰ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\Delta$)

Προφανές, **ὅτι εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἡ συνάρτησις δὲν παραγωγίζεται εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\Delta$.**

**2.** Συνήθως τὴν συνάρτησιν $F(x) = \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathcal{D}(f)-\{\xi\}$ τὴν καλοῦμεν **κλίσιν** τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\mathcal{D}(f)$ ἢ καὶ πηλίκον αὐξήσεων τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\mathcal{D}(f)$. Προφανῶς δὲ ἂν $\xi$ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$, τότε $\xi$ σημεῖον συσσωρεύσεως καὶ τοῦ $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(f)-\{\xi\}$ καὶ ἑπομένως ἔχει νόημα νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ τοῦ :

$$\lim_{x\to\xi} F(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

**3.** Ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ εἶναι πάντοτε **ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς** (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει τὸ ὅριον) καὶ **οὐδέποτε μία συνάρτησις.**

**4.** Συνηθίζομεν τὴν κατὰ ἀκριβολογίαν **πρώτην παράγωγον** τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ νὰ τὴν λέγωμεν ἁπλῶς παράγωγον τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$.

**5.** Αἱ κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς 2, 3 ὁριζόμεναι ἀριστερὰ παράγωγος f καὶ δεξιὰ παράγωγος τῆς f καλοῦνται πλευρικαὶ παράγωγοι τῆς f εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα.

**6.** Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐν R μόνον ἡ ἀριστερὰ ἢ μόνον ἡ **δεξιὰ πλευρικὴ παράγωγος** τῆς f **εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$, τότε θὰ λέγωμεν, ὅτι αὐτὴ εἶναι καὶ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$.** Διότι ἂν $\Delta = [\alpha, \beta]$ καὶ εἶναι $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, τότε δυνάμεθα νὰ ὁμιλῶμεν διὰ δεξιὰν παράγωγον τῆς f εἰς τὸ $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, διὰ ἀριστερὰν παράγωγον τῆς f εἰς τὸ $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, ἀλλὰ μόνον διὰ δεξιὰν παράγωγον τῆς f εἰς τὸ α καὶ διὰ ἀριστερὰν μόνον παράγωγον τῆς f εἰς τὸ β, ὄχι δὲ διὰ ἀριστερὰν παράγωγον τῆς f εἰς τὸ α καὶ δεξιὰν τῆς f εἰς τὸ β.

Ἐὰν λοιπὸν ὑπάρχῃ ἡ δεξιὰ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ α, τότε ἡ f παραγωγίζεται εἰς τὸ α, ἀφοῦ $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha+0} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$ ἐπειδή, ὅταν $\Delta = [\alpha, \beta]$ καὶ γράφωμεν $x \to \alpha$, ἐννοοῦμεν $x \to \alpha + 0$.

Ἑπομένως : $f'(\alpha + 0) = f'(\alpha)$.

Ἀναλόγως : $f'(\beta - 0) = f'(\beta)$.

**7.** Ἐφ' ὅσον $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, δηλαδὴ ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ $\Delta = (\alpha, \beta)$ καὶ ὑπάρχει ἡ $f'(\xi + 0)$ καὶ $f'(\xi - 0)$, τότε, ἐὰν $f'(\xi + 0) = f'(\xi - 0)$, θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ $f'(\xi)$ καὶ θὰ εἶναι :

$$f'(\xi + 0) = f'(\xi - 0) = \xi'(\xi)$$

Ἤτοι ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος πρότασις.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἐὰν ὑπάρχουν ἐν R αἱ δύο πλευρικαὶ παράγωγοι τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$, ὅπου ξ ἀμφίπλευρον σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ Δ καὶ εἶναι ἴσαι, τότε ὑπάρχει καὶ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ καὶ ἀντιστρόφως.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω ὅτι $\lim_{x \to \xi+0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lambda_1 \epsilon R$ καὶ $\lim_{x \to \xi-0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lambda_2 \epsilon R$ καὶ ἔστω $\lambda_1 = \lambda_2$.

Γνωρίζομεν, ὅτι ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν τὰ ἀμφίπλευρα ὅρια τῆς f εἰς τὴν

θέσιν $x=\xi\epsilon\Delta$ καὶ εἶναι ἴσα, θὰ ὑπάρχῃ καὶ τὸ $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lambda\epsilon R$ καὶ εἶναι $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lambda\epsilon R$ τότε ὑπάρχουν καὶ τὰ δύο πλευρικὰ ὅρια τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\Delta$ καὶ εἶναι ἴσα πρὸς $\lambda\epsilon R$.

**Ὥστε : Ἐὰν διὰ κάποιο ἐσωτερικὸν σημεῖον $\xi\epsilon\Delta$ δὲν ὑπάρχῃ μία τῶν πλευρικῶν παραγώγων ἢ ὑπάρχουν ἀμφότεραι, ἀλλὰ εἶναι διαφορετικαί, τότε δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\Delta$.**

**8. Προσέξατε** διὰ νὰ ἔχῃ νόημα ἡ ἔκφρασις «ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\Delta$», θὰ πρέπει τὸ σημεῖον ξ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ Δ καὶ νὰ εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως αὐτοῦ. Ἑπομένως εἰς τὰ **μεμονωμένα σημεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως ἡ παράγωγος δὲν ὁρίζεται**, ἂν καὶ ἡ συνάρτησις εἰς αὐτὰ εἶναι συνεχής.

Ὥστε βασικῶς ἀναφερόμεθα εἰς σημεῖα ἐσωτερικὰ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως.

**9.** Ἑπομένως, ἐὰν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως f εἶναι $\Delta=[\alpha,\beta]$, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ f παραγωγίζεται ἐπὶ τοῦ $[\alpha,\beta]$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν:

α) Ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς κάθε σημεῖον τοῦ $(\alpha,\beta)$.

β) Ὑπάρχῃ ἡ δεξιὰ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ α.

γ) Ὑπάρχῃ ἡ ἀριστερὰ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ β.

**10.** Ἐπανερχόμενοι πρὸς στιγμὴν εἰς τὰ γνωστὰ περὶ ἀκολουθιῶν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὸν ἀκόλουθον ὁρισμὸν διὰ τὴν παράγωγον τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\Delta$.

**Ὁρισμὸς 4.** *Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα Δ καὶ ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ καὶ τὴν συνάρτησιν* $F(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ *μὲ* $\mathcal{D}(F)=\Delta-\{\xi\}$. *Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ f παραγωγίζεται εἰς τὴν θέσιν* $x=\xi\epsilon\Delta$ *καὶ ἔχει παράγωγον τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν* $\lambda\epsilon R$ *(ἢ* $+\infty$ *ἢ* $-\infty$*) ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἰσχύῃ:*

$$\begin{pmatrix} x_\nu\to\xi \\ \text{μὲ } x_\nu\epsilon\Delta-\{\xi\}\ \forall\nu\epsilon N\end{pmatrix}\Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(x_\nu)-f(\xi)}{x_\nu-\xi}=\lambda\Bigg)\Longleftrightarrow\begin{cases} f'(\xi)=\lambda \\ \lambda\epsilon R \text{ ἢ } +\infty \text{ ἢ } -\infty.\end{cases}$$

Κατόπιν τούτου, ἐὰν διὰ δύο ἀκολουθίας ἀπὸ τὸ $\Delta-\{\xi\}$ τὰς $x_\nu|\ \nu\epsilon N$ καὶ $x'_\nu|\ \nu\epsilon N$ μὲ $x_\nu\to\xi$ καὶ $x'_\nu\to\xi$ εἶναι $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(x_\nu)-f(\xi)}{x_\nu-\xi}\neq\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(x'_\nu)-f(\xi)}{x'_\nu-\xi}$ τότε δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\Delta$.

**11.** Πολλάκις κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς κάμνομεν χρῆσιν καὶ τοῦ ἀκολούθου τύπου εὑρέσεως τῆς παραγώγου εἰς τὸ σημεῖον $\xi \epsilon \Delta$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\xi+\varepsilon) - f(\xi)}{\varepsilon} = f'(\xi)$$

ποὺ προκύπτει ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ ὡς ἑξῆς. Ἐὰν θέσωμεν $x - \xi = \varepsilon$, τότε: $x = \xi + \varepsilon$, ὁπότε ἐὰν $(\xi+\varepsilon)\epsilon\Delta$, ὅταν $x \to \xi$, τότε $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \neq 0)$ καὶ ἑπομένως:

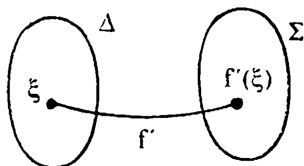
$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\xi+\varepsilon) - f(\xi)}{\varepsilon}.$$

**12.** Τὴν παράγωγον τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ συμβολίζομεν καὶ ὡς ἑξῆς κατὰ Leibniz:

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=\xi} \quad \text{ἢ καὶ μὲ} \quad (f'(x))_{x=\xi}.$$

## 12. 3 Ἡ συνάρτησις πρώτης παραγώγου. Παράγωγος ἀνωτέρας τάξεως

Ἔστω μία συνάρτησις f μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα Δ καὶ ἔστω, ὅτι ὑπάρχει τὸ $\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ ἐν R, διὰ κάθε σημεῖον ξ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς f (ξ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ Δ). Εἶναι τότε προφανές, ὅτι ἡ f παραγωγίζεται ἐπὶ ὁλοκλήρου τοῦ Δ καὶ ἑπομένως $\forall \xi \epsilon \Delta$ ἔχει νόημα τό: $\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)\epsilon R$. Ἐὰν συνεπῶς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ f εἶναι παντοῦ ὡρισμένη ἐν Δ καὶ παραγωγίζεται εἰς κάθε σημεῖον τοῦ Δ καὶ ἂν




παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ποὺ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι παράγωγοι τῶν διαφόρων σημείων ξ τοῦ Δ, τότε εἰς κάθε σημεῖον $\xi \epsilon \Delta$ ἀντιστοιχεῖ διὰ τῆς f′ ἕνα στοιχεῖον f′(ξ) τοῦ Σ, ἐντελῶς ὡρισμένον, ποὺ εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς f′(ξ) (ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$). Ἡ μονοσήμαντος αὐτὴ ἀπεικόνισις τοῦ Δ εἰς τὸ Σ διὰ τῆς f′ εἶναι μία συνάρτησις f′, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Δ καὶ τιμὰς αὐτῆς εἰς τὸ Σ, καὶ μὲ τύπον $y' = f'(x)$.

Τὴν συνάρτησιν αὐτὴν f′ καλοῦμεν συνάρτησιν πρώτης παραγώγου τῆς f εἰς τὸ Δ, ἢ ἁπλῶς παράγωγον τῆς f εἰς τὸ Δ.

**Ὁρισμός.** *Καλοῦμεν συνάρτησιν πρώτης παραγώγου τῆς f εἰς τὸ Δ, τὴν συνάρτησιν f′ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f')=\{\xi\in\mathcal{D}(f)$ καὶ ὑπάρχει τὸ $f'(\xi)\}$ καὶ μὲ τιμὰς αὐτῆς εἰς τὸ R. Προφανῶς $R(f')=\{f'(\xi)$ μὲ $\xi\in\mathcal{D}(f')\}\subset R$.*

Ἐὰν ἡ συνάρτησις f′ τῆς πρώτης παραγώγου τῆς f ἔχῃ εἰς ἕνα σημεῖον $\xi\in\Delta$ παραγωγον, τότε ἡ παράγωγος τῆς f′ εἰς τὸ $\xi\in\Delta$ καλεῖται δευτέρα παράγωγος τῆς f εἰς τὸ $\xi\in\Delta$ καὶ συμβολίζεται μὲ $f''(\xi)$. Ἐὰν τώρα ἡ $f''(\xi)$ ὑπάρχῃ διὰ $\forall\xi\in\Delta$, τότε, ὡς καὶ προηγουμένως, ὁρίζεται μία νέα συνάρτησις f″ εἰς τὸ Δ, ἡ ὁποία καλεῖται **συνάρτησις δευτέρας παραγώγου τῆς f εἰς τὸ Δ.** Ἀναλόγως ὁρίζονται αἱ συναρτήσεις παράγωγοι τρίτης κ.ο.κ. τάξεως τῆς f εἰς τὸ Δ περὶ τῶν ὁποίων θὰ ἀσχοληθῶμεν λεπτομερέστερον κατωτέρω.

Συμβολικῶς τὴν παράγωγον τάξεως ν (ἐφ᾽ ὅσον ὑπάρχει) συμβολίζομεν μὲ $f^{(\nu)}$ καὶ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\Delta$ μὲ $f^{(\nu)}(\xi)$.

**Παρατήρησις 1.** Θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ τονίσωμεν ἀπὸ τοῦδε ὅτι ἡ ν-οστὴ πάραγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\Delta$, ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$f^{(\nu)}(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(\nu-1)}(x)-f^{(\nu-1)}(\xi)}{x-\xi},$$

καὶ διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ν-οστὴν παράγωγον τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\Delta$ θὰ πρέπει ἡ συνάρτησις $f^{(\nu-1)}$ (τῆς ν—1 τάξεως παραγώγου τῆς f) **νὰ εἶναι ὡρισμένη εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ ξ, δηλαδὴ δὲν ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ τὸ $f^{(\nu-1)}(\xi)=\lambda\in R$.**

**Παρατήρησις 2.** Ἀκόμη θεωροῦμεν ἀπαραίτητον καὶ πάλιν νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν σας ἐπὶ τοῦ ἑξῆς σημείου ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν πρέπει νὰ γίνεται σύγχισις.

Ἡ ἔννοια **παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\Delta$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $f'(\xi)\in R$ καὶ ὄχι μία συνάρτησις ποῦ εἶναι ἡ παράγωγος τῆς f.**

Ὥστε ἄλλη ἡ ἔννοια, ἡ παράγωγος f′ τῆς f καὶ ἄλλη ἡ ἔννοια ἡ παράγωγος $f'(\xi)\in R$ τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\Delta$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἡ παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς συναρτήσεως.**

Ἀπάντησις. Ἔστω $f(x)=c\ \forall x\in R$, καὶ $\xi\in R$ τυχὸν σημεῖον τοῦ $\mathcal{D}(f)=R$, προφαφανῶς σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$. Ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$ θὰ εἶναι, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ,

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{c-c}{x-\xi}=0.$$

Ἄρα ἡ παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς συναρτήσεως ὑπάρχει πάντοτε καὶ εἶναι μηδὲν $\forall x \in R$. Ὥστε : $f'(x) = (c)' = 0$.

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις πρώτης παραγώγου μιᾶς σταθερᾶς συναρτήσεως εἶναι ἡ σταθερὰ συνάρτησις $f'(x) = 0$.

Προφανῶς καὶ κάθε ἑπομένη συνάρτησις δευτέρας κ.ο.κ. ν-οστῆς παραγώγου εἶναι ἡ σταθερὰ συνάρτησις $f^{(\nu)}(x) = 0 \mid \nu = 1,2,3,\ldots$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. *Ἡ παράγωγος τῆς μονωνύμου συναρτήσεως* $f(x) = x^\nu$ *μὲ* $\nu \in N$.**

***Ἀπάντησις.*** Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R$. Ἔστω $\xi \in \mathscr{D}(f)$ μὲ ξ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathscr{D}(f)$. Ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathscr{D}(f)$ εἶναι :

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{x^\nu - \xi^\nu}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\xi + \ldots + \xi^{\nu-1}) =$$
$$= \xi^{\nu-1} + \xi^{\nu-1} + \ldots + \xi^{\nu-1} = \nu\xi^{\nu-1} \text{ καὶ τοῦτο } \forall \xi \in \mathscr{D}(f).$$

Ὥστε ἡ συνάρτησις πρώτης παραγώγου μιᾶς μονωνύμου συναρτήσεως $f(x) = x^\nu \mid \nu \in N$ εἶναι : $\quad f'(x) = \nu x^{\nu-1} \; \forall x \in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. *Ἡ παράγωγος τῆς* $f(x) = |x|$.**

***Ἀπάντησις.*** Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R$. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α) Ἔστω $x \in R^+$, τότε $f(x) = x$ καὶ κατὰ τὸ προηγούμενον $f'(x) = 1$.

β) Ἔστω $x \in R^-$, τότε $f(x) = -x$ καὶ ἄρα $f'(x) = -1$.

γ) Ἐὰν $x = 0$, τότε ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ἐξετάσωμεν τὰ πλευρικὰ ὅρια τῆς f διὰ $x \to 0+0$ καὶ διὰ $x \to 0-0$.

Ἔχομεν : $\displaystyle \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x - 0}{x} = 1$ καὶ $\displaystyle \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x - 0}{x} = -1$.

Ἐπειδὴ ἡ δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερὰ παράγωγος τῆς $f(x) = |x|$ εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι διάφοροι ἕπεται, ὅτι ἡ f δὲν ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. *Εὕρετε τὴν παράγωγον τῆς f μέ :***

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 & \text{ἂν } x \leq 3 \\ x^2+1 & \text{ἂν } x > 3 \end{cases}$$

***εἰς τὴν θέσιν*** $x = 3$.

***Ἀπάντησις.*** Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = (-\infty, 3] \cup (3, +\infty)$, ἤτοι $\mathscr{D}(f) = R$ καὶ τὸ $\xi = 3$ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathscr{D}(f)$. Ἐπειδὴ ἡ f εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $\xi = 3$ ὁρίζεται μὲ διαφορετικοὺς τύπους θὰ ἐξετάσωμεν τὰς πλευρικὰς παραγώγους τῆς f εἰς τὴν θέσιν $\xi = 3$. Ἔχομεν, προφανῶς $f(3) = 54$, καί :

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3+0} \frac{x^2+1-54}{x-3} = \lim_{x \to 3+0} \frac{x^2 - 53}{x - 3} = +\infty \text{ καθὼς καί :}$$

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3-0} \frac{2x^2 - 54}{x - 3} = \lim_{x \to 3-0} 2(x^2+3x+9) = 54.$$

Ἐπειδὴ αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι τῆς f εἰς τὴν θέσιν $\xi = 3$ εἶναι διάφοροι δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 3 \in \mathscr{D}(f)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Εὕρετε τὴν παράγωγον τῆς f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{ἄν } x < 0 \\ x^4+2 & \text{ἄν } x \geq 0 \end{cases}$$

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = R$. Διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

α) Ἐὰν $x<0$, τότε ὁ τύπος τῆς f εἶναι $f(x) = -3x$. Ἔστω $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ μὲ $\xi<0$. Ἡ παράγωγος εἰς αὐτὸ εἶναι τό:

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{-3x-(-3\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{-3(x-\xi)}{x-\xi} = -3.$$

Ὥστε $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ μὲ $x<0$ θὰ εἶναι: $f'(x) = -3$.

β) Ἐὰν $x>0$, τότε ὁ τύπος τῆς f εἶναι: $f(x) = x^4+2$. Ἔστω $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ μὲ $\xi>0$. Ἡ παράγωγος εἰς αὐτὸ εἶναι τό:

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{(x^4+2)-(\xi^4+2)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{x^4-\xi^4}{x-\xi} = 4\xi^3.$$

Ὥστε $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ μὲ $x>0$ θὰ εἶναι: $f'(x) = 4x^3$.

γ) Ἐξετάζομεν τώρα ἂν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=0 \in \mathcal{D}(f)$ καὶ τὸ 0 σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$. Ἀναζητῶμεν τὰ πλευρικὰ ὅρια:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x^4+2-2}{x-0} = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$$= \lim_{x\to 0-0} \frac{-3x-2}{x-0} = +\infty$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι διάφοροι δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x} & \text{ἄν } x \neq 0 \\ 0 & \text{ἄν } x = 0 \end{cases}$$

**νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τὴν θέσιν x = 0.**

**Ἀπάντησις.** Ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, ὅπου $0 \in \mathcal{D}(f)$ καὶ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$.

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\eta\mu \frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu \dfrac{1}{x} = 0$ (ὡς γνωστόν).

Ἄρα ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ καὶ εἶναι $f'(0) = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} x\eta\mu \dfrac{1}{x} & \text{ἄν } x \neq 0 \\ 0 & \text{ἄν } x = 0 \end{cases}$$

**εἰς τὴν θέσιν x = 0.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f)=R$ καὶ τὸ μηδὲν σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$ Ἐξετάζομεν, ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Ἔχομεν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu\dfrac{1}{x}$. Εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι τὸ ὅριον τοῦτο δὲν ὑπάρχει, ἄρα δὲν ὑπάρχει καὶ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μέ: $f(x)=\sqrt{x}$.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f)=[0,+\infty)$. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x=\xi\in(0,+\infty)$ καὶ ἀναζητοῦμεν τὸ $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$.

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\xi}}{x-\xi}=\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}}=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=f'(\xi)$.

Ἄρα ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον $\xi\in(0,+\infty)$ ὑπάρχει καὶ εἶναι: $f'(\xi)=$ $=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$ $\forall\xi\in(0,+\infty)$. Ὥστε ἡ συνάρτησις παράγωγος τῆς f εἶναι ἡ:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad\forall x\in(0,+\infty).$$

Ἂς ἀναζητήσωμεν τώρα ἂν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς f καὶ εἰς τὴν θέσιν $x=0$.

Πρὸς τοῦτο ἀναζητῶμεν ἂν ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, ποὺ ἐπειδὴ $\mathcal{D}(f)=$ $=[0,+\infty)$ ταυτίζεται, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. (Παρατ. 6)

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Ἄρα ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=0$ δὲν ὑπάρχει, ἀλλὰ ἀπειρίζεται θετικῶς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς f μὲ $f(x)=\eta\mu x$.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f)=R$. Ἔστω $\xi\in\mathcal{D}(f)$ καὶ ξ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς παρατηρήσεως 11.

Θὰ ἔχωμεν: $f'(\xi)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\eta\mu(\xi+\varepsilon)-\eta\mu\xi}{\varepsilon}=$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma\upsilon\nu\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)=1\cdot\sigma\upsilon\nu\xi=\sigma\upsilon\nu\xi.$$

Ὥστε ἡ συνάρτησις παράγωγος τῆς $f(x)=\eta\mu x$ εἶναι: $f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x\ \forall x\in R$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x\ \forall x\in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς f μὲ $f(x)=e^x$.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν: $f'(x) = (e^x)' = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{e^{x+\varepsilon} - e^x}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{e^x(e^\varepsilon - 1)}{\varepsilon} =$

$= e^x \cdot \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1$, ὁπότε:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \ \forall x \in R.$$

Ὅπως παρατηρήσατε ἐδόθη σύντομος ἀπόδειξις, πορεία τὴν ὁποίαν ἀκολουθοῦμεν ἐφεξῆς.

**Τὸ $e^x$ θεωρεῖται ὡς σταθερὰ καὶ μεταβλητὴ ἡ $\varepsilon$ μὲ $\varepsilon \to 0$, ἀφοῦ εἰς τὴν θέσιν τοῦ $x$ θεωροῦμεν τυχόντα ἀριθμὸν $\xi$ ἀπὸ τὸ $\mathcal{D}(f)$, ἀλλὰ τελείως ὡρισμένον.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς f μὲ $f(x) = \alpha^x$, ὅπου $\alpha > 0$.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν: $f'(x) = (\alpha^x)' = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\alpha^{x+\varepsilon} - \alpha^x}{\varepsilon} = \alpha^x \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$.

Εἶναι ὅμως γνωστὸν ὅτι $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \log\alpha$ καὶ ἑπομένως:

$$f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^x \log\alpha \ \forall x \in R \text{ καὶ } \alpha > 0.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς f μὲ $f(x) = \log x$.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R^+$. Ἔχομεν $f'(x) = (\log x)' = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\log(x+\varepsilon) - \log x}{\varepsilon} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{x}\right)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x} \frac{\log\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{x}\right)}{\dfrac{\varepsilon}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{x}\right)}{\dfrac{\varepsilon}{x}} =$$

$= \dfrac{1}{x}$ διότι ὡς γνωστὸν $\dfrac{\log(1+\eta)}{\eta} \to 1$ ἂν $\eta \to 0$.

Ὥστε: $f'(x) = (\log x)' = \dfrac{1}{x} \ \forall x \in R^+$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς f μέ:**

**$f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ εἰς τὴν θέσιν $x = 2$ καὶ εἰς τὴν θέσιν $x = -3$.**

**Ἀπάντησις.** Πρέπει $x \geq 2$ καὶ $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \iff x \geq 3$ ἢ $x \leq 2$. Ὥστε $\mathcal{D}(f) = \{2\} \supset \cup [3, +\infty)$. Ἐπειδὴ τὸ 2 εἶναι μεμονωμένον σημεῖον τοῦ $\mathcal{D}(f)$ δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 2$. Ἐπειδὴ τὸ $-3 \notin \mathcal{D}(f)$, ἐπίσης δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = = -3$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{ἂν } x \leq 2 \\ \alpha x + \beta & \text{ἂν } x > 2 \end{cases}$$

**Εὕρετε πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγοῦν τὰ $\alpha, \beta \in R$ ἵνα ὑπάρχῃ ἡ $f'(2)$.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Ἀλλὰ ἡ f ὁρίζεται εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ $2 \in \mathcal{D}(f)$ ὅπου 2 σημεῖον συσσωρεύσεως αὐτοῦ, μὲ διαφορετικοὺς τύπους. Ἵνα λοιπὸν ὑπάρχῃ ἡ $f'(2)$ θὰ πρέπει νὰ ὑπάρχουν αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 2$ καὶ ἀκόμη νὰ συμπίπτουν.

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-0} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-0} (x^2+2x+4) = 12.$

Καὶ $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+0} \frac{\alpha x+\beta-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+0} \frac{\alpha(x-2)+\beta-8+2\alpha}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2+0} \left(\alpha + \frac{\beta-8+2\alpha}{x-2}\right)$. Ἐὰν $\beta - 8+2\alpha \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to 2+0} \left(\alpha + \frac{\beta-8+2\alpha}{x-2}\right) =$
$= +\infty$ ἢ $-\infty$ καὶ ἑπομένως ἵνα ὑπάρχῃ τὸ ὅριον αὐτὸ πρέπει: $\beta - 8+2\alpha = 0$.

Τότε ὅμως $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \alpha$.

Ἑπομένως ἵνα ὑπάρχῃ τὸ $f'(2)$ θὰ πρέπει νὰ ἰσχύουν συγχρόνως: $\alpha=12$ καὶ $\beta-8+$ $+2\alpha = 0$, ὁπότε λαμβάνομεν: $\beta = -16$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f ὡρισμένην $\forall x\in R$ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἐὰν $x_1$, $x_2$ δύο τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ νὰ ἰσχύῃ:**

$$f(x_1+x_2) = f(x_1).f(x_2)$$

**Ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ καὶ ἰσχύει $f(0) = 1$, δείξατε, ὅτι ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f $\forall x\in R$ καὶ ἀκόμη, ὅτι ἰσχύει:**

$$f'(x) = f(x)f'(0) \quad \forall x\in R$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐὰν $\xi\in\mathcal{D}(f)$ καὶ ξ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$, τότε:

$$f'(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon}, \text{ μὲ } (\xi+\varepsilon)\in R$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $f(\xi+\varepsilon) = f(\xi).f(\varepsilon)$ καὶ ἑπομένως:

$$f'(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\xi).f(\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon} = f(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon}.$$

Εἶναι ὅμως $f(0) = 1$ καὶ ἑπομένως:

$$f'(\xi) = f(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon}.$$

Καὶ ἐπειδὴ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} = f'(0)$, θὰ ἔχωμεν: $f'(\xi) = f(\xi).f'(0)$ καὶ τοῦτο $\forall\xi\in R$.

Ὥστε ἰσχύει: $f'(x) = f(x)f'(0)$ $\forall x\in R$ καὶ ποὺ ἐκφράζει προφανῶς, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἡ παράγωγος τῆς f $\forall x\in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \text{ ἂν } 0 \leq x \leq 1 \\ x^5 \text{ ἂν } x > 1 \end{cases}$$

**Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις πρώτη παράγωγος τῆς f καθὼς καὶ ἡ συνάρτησις δευτέρα παράγωγος τῆς f.**

**Ἀπάντησις.** Παρατηροῦμεν ὅτι $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty)$. Κατὰ τὰ προηγούμενα εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς f εἶναι ἡ συνάρτησις $f'(x) = 4x^3$ $\forall x\in(0, 1)$ καὶ ἡ $f'(x) = 5x^4$ $\forall x\in(1, +\infty)$.

Ἐξετάζομεν τώρα ἂν ὑπάρχῃ ἡ $f'(0)$, ἡ ὁποία θὰ πρέπει νὰ ταυτίζεται μὲ τὴν ἀριστερὰν πλευρικὴν παράγωγον τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

Ἔχομεν $f'(0) = 4.0 = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x^4-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} x^3 = 0 = f'(0)$

Ὥστε εἶναι $f'(x) = 4x^3$ $\forall x\in[0, 1)$.

Ἐξετάζομεν τώρα τὰς πλευρικὰς παραγώγους τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 1$.

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^5-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0} (x^4+x^3+x^2+x+1) = 5$, ἐνῷ

$\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^4-1}{x-1} = 4.$

Καὶ αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 1$ δὲν συμπίπτουν.

Συγκεντρώνοντες τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{ἄν } 0 \leq x < 1 \\ 5x^4 & \text{ἄν } x > 1 \end{cases}$$

Εὑρίσκοντες τώρα τὴν πρώτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως f′ ἔχομεν τὴν δευτέραν παράγωγον τῆς f. Εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 & \text{ἄν } 0 \leq x < 1 \\ 20x^3 & \text{ἄν } x > 1 \end{cases}$$

Παρατηρήσατε ὅτι ἐνῷ $\mathscr{D}(f) = [0, +\infty)$ εἶναι $\mathscr{D}(f') = [0, +\infty) - \{1\}$ (Παρατήρησις 9).

## 12. 4 Κανόνες παραγωγίσεως

Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ὁ τύπος μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἀρκετὰ σύνθετος, δὲν εἶναι εὔκολος ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὁρισμοῦ.

Μία σειρὰ προτάσεων μᾶς παρέχει ὡρισμένους κανόνας μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων θὰ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίζωμεν τὰς παραγώγους διαφόρων συναρτήσεων χωρὶς νὰ καταφεύγωμεν εἰς τὸν ὁρισμόν.

Οἱ κανόνες αὐτοί, πάρα πολὺ ἁπλοῖ καὶ χρήσιμοι, μᾶς διευκολύνουν τὰ μέγιστα εἰς τὰς διαφόρους ἐφαρμογὰς καὶ τὰς ἀσκήσεις. Μεταξὺ τῶν διαφόρων προτάσεων, ποὺ θὰ ἀναφέρωμεν κατωτέρω, ὅλως ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχει μία πρότασις ποὺ ἀναφέρεται παραλλήλως **καὶ εἰς τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως** καὶ εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμος εἰς πολλὰς περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. **Ἐὰν μία συνάρτησις f ἔχῃ παράγωγον εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi \in \mathscr{D}(f)$, ὅπου ξ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathscr{D}(f)$, τότε ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $\xi \in \mathscr{D}(f)$. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει πάντοτε.**

**Ἀπόδειξις.** Ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi \in \mathscr{D}(f)$, ἔπεται ὅτι θὰ ὑπάρχῃ καὶ τὸ $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) = \lambda \in R$.

Ἀλλὰ ἰσχύει προφανῶς:

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} (x - \xi) \ \forall x \in \mathscr{D}(f) - \{\xi\}.$$

Τότε ὅμως θὰ εἶναι:

$$\lim_{x\to\xi}(f(x)-f(\xi))=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot\lim_{x\to\xi}(x-\xi)$$

$=f'(\xi).0=0$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\lim_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$.

Τοῦτο ὅμως σημαίνει, ὅτι ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$.

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις δὲν εἶναι πάντοτε ἀληθής, ἤτοι εἶναι δυνατὸν μία συνάρτησις f νὰ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$, ἀλλὰ νὰ μὴν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$.

Διὰ νὰ διατηρήσετε εἰς τὴν μνήμην σας τὴν πρότασιν καὶ νὰ ἐνθυμῆσθε, ὅτι δὲν ἰσχύει πάντοτε τὸ ἀντίστροφον, ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμῆσθε τὸ ἀκόλουθον ἁπλούστατον παράδειγμα συναρτήσεως:

Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x)=|x|$, ἡ ὁποία, ὡς εἴδωμεν εἰς τὰ παραδείγματα, ἐνῷ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=0$, ἐν τούτοις δὲν ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=0$.

**Προσέξατε ὅμως** τὴν ἀνάστροφον πρότασιν, ἡ ὁποία ἰσχύει πάντοτε, δηλαδὴ **ἐὰν ἡ f δὲν εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$, τότε δὲν ὑπάρχει καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$.** (Διότι ἂν ὑπῆρχε ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x=\xi$ τῆς f, τότε ἡ f θὰ ἦτο καὶ συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἡ συνάρτησις f μέ:**

$$f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{x} & \text{μὲ } x\neq 0\\ 0 & \text{μὲ } x=0\end{cases}$$

**ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=0$; Εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $x=0$;**

**Ἀπάντησις.** Ἡ συνάρτησις f, ὡς εἴδωμεν εἰς τὸ παράδειγμα 7 τῆς προηγουμένης παραγράφου, δὲν ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=0$. Δὲν δυνάμεθα συνεπῶς νὰ συμπεράνωμεν ἂν εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=0$. Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=0$.

Προσέξατε ἀκόμη τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα εἰς τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως f εἶναι ἄπειρος εἰς τὸ σημεῖον $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$, τότε ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι ἀναγκαίως καὶ συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μέ:**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{ἂν } x\neq 0\\ 0 & \text{ἂν } x=0\end{cases}$$

**Ποία ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τὴν θέσιν $x=0$; Εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=0$;**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν: $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}-0}{x-0}=+\infty$, ὥστε εἶναι $f'(0)=+\infty$.

Ἐκ τούτου δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν περὶ τῆς συνεχείας τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

Προφανῶς ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι ἀσυνεχής.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ἔχει εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ παράγωγον $+\infty$, ἐνῷ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν αὐτήν.**

**Ἀπάντησις.** Πράγματι εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ $f(x) = \sqrt[5]{x}$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x = 0$. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[5]{x}\right)^4} = +\infty$$

Ὥστε ἂν ἡ παράγωγος τῆς f εἰς μίαν θέσιν $x = \xi\in\mathcal{D}(f)$ ἀπειρίζεται, οὐδὲν συμπέρασμα ἔχομεν περὶ τῆς συνεχείας αὐτῆς εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\in\mathcal{D}(f)$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$, μὲ πεδία ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f_1)$ καὶ $\mathcal{D}(f_2)$ ἀντιστοίχως, ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f_1)\cap\mathcal{D}(f_2)$, τότε καὶ αἱ συναρτήσεις $f_\alpha = f_1+f_2$ καὶ $f_\delta = f_1 - f_2$ ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\in\mathcal{D}(f_1)\cap\mathcal{D}(f_2)$.**

**Ἰσχύουν συνεπῶς :**

$$f_\alpha' = f'_1+f'_2 \quad \text{καὶ} \quad f_\delta' = f'_1 - f'_2$$

**ἐφ' ὅσον αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ παραγωγίζονται $\forall x\in\mathcal{D}(f_1)\cap\mathcal{D}(f_2)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\in\mathcal{D}(f_1)\cap\mathcal{D}(f_2)$. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὑπάρχουν καὶ τὰ ἀκόλουθα ὅρια :

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to\xi}\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi}$$

Ἡ παράγωγος τῆς $f_\alpha$ θὰ ὑπάρχῃ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\in\mathcal{D}(f_1)\cap\mathcal{D}(f_2)$, ἐφ' ὅσον ὑπάρχει καὶ τό :

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(\xi)}{x-\xi}.$$

Εἶναι ὅμως : $\displaystyle\lim_{x\to\xi}\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)+f_2(x)-f_1(\xi)-f_2(\xi)}{x-\xi} =$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} + \lim_{x\to\xi}\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi} = f'_1(\xi) + f'_2(\xi).$$

Ὥστε : $\qquad f_\alpha'(\xi) = f'_1(\xi)+f'_2(\xi).$

Ἑπομένως ἂν τοῦτο συμβαίνῃ $\forall x\in\mathcal{D}(f_1)\cap\mathcal{D}(f_2)$ θὰ ἰσχύῃ :

$$f_\alpha'(x) = f'_1(x)+f'_2(x) \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν $f_\delta$.

Ἡ (1) γενικεύεται ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις καὶ ἔχομεν:

$$f_\alpha'(x) = f'_1(x)+f'_2(x)+\ldots+f'_\nu(x) \mid \nu\in N \ \forall x\in \mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)\cap\ldots\cap\mathscr{D}(f_\nu).$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$, μὲ πεδία ὁρισμοῦ $\mathscr{D}(f_1)$ καὶ $\mathscr{D}(f_2)$ ἀντιστοίχως, ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$, τότε καὶ αἱ συναρτήσεις $f_\Pi=f_1.f_2$ καὶ $f_\Delta=\dfrac{f_1}{f_2}$ (ἂν $f_2(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$ διὰ τὴν $f_\Delta$) ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$ καὶ ἰσχύουν:**

$$f'_\Pi = f'_1f_2+f_1f_2' \quad \text{καὶ} \quad f_\Delta' = \frac{f'_1f_2 - f_2'f_1}{f_2^2}$$

**ἐφ' ὅσον αἱ $f_1, f_2$ παραγωγίζονται $\forall x\in\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$ θὰ ὑπάρχουν τά:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to\xi}\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi}$$

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathscr{D}(f_1)\cap\cap\mathscr{D}(f_2)$ κατὰ τὴν πρότασιν 1 αὗται εἶναι καὶ συνεχεῖς εἰς τὴν θέσιν αὐτήν, ἑπομένως θὰ ἰσχύουν:

$$\lim_{x\to\xi}f_1(x)=f_1(\xi) \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to\xi}f_2(x)=f_2(\xi)$$

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ τώρα παράγωγος τῆς $f_\Pi$ εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$ θὰ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ καὶ τὸ $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f_\Pi(x)-f_\Pi(\xi)}{x-\xi}$.

Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f_\Pi(x)-f_\Pi(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x).f_2(x)-f_1(\xi)f_2(\xi)}{x-\xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)f_2(x)-f_1(\xi)f_2(x)+f_1(\xi)f_2(x)-f_1(\xi)f_2(\xi)}{x-\xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{[f_1(x)-f_1(\xi)]f_2(x)+f_1(\xi)[f_2(x)-f_2(\xi)]}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\xi}f_2(x)+f_1(\xi)\lim_{x\to\xi}\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi} = f_1'(\xi).f_2(\xi)+f_1(\xi)f_2'(\xi).$$

Ὥστε: $f_\Pi'(\xi)=f'_1(\xi)f_2(\xi)+f_1(\xi)f'_2(\xi)$.

Καὶ ἂν τοῦτο ἰσχύῃ $\forall x\in\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$ θὰ ἔχωμεν:

$$f_\Pi'(x)=f'_1(x)f_2(x)+f_1(x)f'_2(x).$$

Διὰ τὴν συνάρτησιν $f_\Delta$ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}-\dfrac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)}}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x).f_2(\xi)-f_2(x)f_1(\xi)}{f_2(x)f_2(\xi)(x-\xi)}=\frac{1}{f_2(\xi)}\cdot\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f_2(x)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)f_2(\xi)-f_2(x).f_1(\xi)}{x-\xi}=\frac{1}{f_2(\xi)}\cdot\frac{1}{f_2(\xi)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)f_2(\xi)-f_1(\xi)\,f_2(\xi)+f_1(\xi)f_2(\xi)-f_2(x)f_1(\xi)}{x-\xi}=\frac{1}{[f_2(\xi)]^2}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\xi}\frac{f_2(\xi)[f_1(x)-f_1(\xi)]-f_1(\xi)[f_2(x)-f_2(\xi)]}{x-\xi}=\frac{1}{[f_2(\xi)]^2}\cdot$$

$$\cdot\left(f_2(\xi)\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi}-f_1(\xi)\lim_{x\to\xi}\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi}\right)=$$

$$=\frac{1}{[f_2(\xi)]^2}\cdot(f_2(\xi).f'_1(\xi)-f_1(\xi).f'_2(\xi)=\frac{f'_1(\xi)f_2(\xi)-f'_2(\xi)f_1(\xi)}{f_2^2(\xi)}.$$

Ἐπειδὴ ἡ $f_2$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$ εἶναι $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f_2(x)}=\frac{1}{f_2(\xi)}$ (ποὺ ἐχρησιμοποιήθη ἀνωτέρω).

Ὥστε εἶναι:

$$f_\Delta'(\xi)=\frac{f'_1(\xi)f_2(\xi)-f'_2(\xi)f_1(\xi)}{f_2^2(\xi)}$$

Καὶ ἂν τοῦτο συμβαίνῃ $\forall x\epsilon\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$ μὲ $f_2(x)\neq 0$, θὰ ἔχωμεν:

$$f_\Delta'=\frac{f'_1f_2-f'_2f_1}{f_2^2}\quad\forall x\epsilon\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τώρα καὶ τὰ ἀκόλουθα ἁπλᾶ συμπεράσματα:

**1. $[kf(x)]'=kf'(x)$ $\forall x\epsilon\mathscr{D}(f)$ μὲ $k\epsilon R$ (σταθερά).**

**Ἀπόδειξις.** Τὴν k θεωροῦμεν ὡς σταθερὰν συνάρτησιν καὶ ἑπομένως: $[kf(x))]'=k'f(x)+f'(x).k=kf'(x)$, ἀφοῦ, ὡς γνωστόν, ἡ παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς συναρτήσεως εἶναι μηδέν.

**2. $[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\ldots+k_\nu f_\nu(x)]'=k_1f'_1(x)+k_2f'_2(x)+\ldots+k_\nu f_\nu'(x)$, ὅπου $\nu\epsilon N$, $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ σταθεραὶ ἐν R καὶ $\forall x\epsilon\mathscr{D}(f_1)\cap\ldots\cap\mathscr{D}(f_\nu)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἄμεσος ἐφαρμογὴ παραγώγου ἀθροίσματος καὶ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου.

**3. Γενίκευσις διὰ γινόμενον συναρτήσεων.**

**Ἐὰν $f = f_1.f_2 \ldots f_\nu \mid \nu \in N$, τότε $\forall x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(f_\nu)$ ἰσχύει:**

$$f' = f'_1 f_2 \ldots f_\nu + f_1 f'_2 \ldots f_\nu + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_\nu'$$

**Συμβολικῶς:**

$$\left(\prod_{i=1}^{\nu} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{\nu}\left[f_i' . \prod_{j=1}^{\nu} f_j\right] \text{ μὲ } i \neq j,\ \nu \geqq 2.$$

**Ἀπόδειξις.** Διὰ $\nu = 2$ γνωρίζομεν, ὅτι ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = \rho \in N$, ἤτοι:

$$\left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{\rho}\left[f_i' \prod_{j=1}^{\rho} f_j\right].$$

Ἐπειδὴ $\left(\prod_{i=1}^{\rho+1} f_i\right)' = \left[\left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right)(f_{\rho+1})\right]' = \left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right)' \cdot f_{\rho+1} + \left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right) f'_{\rho+1} =$

$$= \sum_{i=1}^{\rho}\left[f_i' \prod_{j=1}^{\rho} f_j\right] + \left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right) f'_{\rho+1} = \sum_{i=1}^{\rho+1}\left[f_i' \prod_{j=1}^{\rho+1} f_j\right]$$

ἕπεται ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = \rho+1$, ἄρα $\forall \nu \in N : \nu \geqq 2$.

**4. Ἐὰν $f_1(x) = \dfrac{1}{f(x)} \mid f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$, τότε: $f'_1(x) = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$ καὶ ἂν $f_1(x) = \dfrac{k}{f(x)}$, τότε $f'_1(x) = \dfrac{-kf'(x)}{f^2(x)}$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν: $\left(\dfrac{k}{f(x)}\right)' = \dfrac{(k)'.f(x) - f'(x).k}{f^2(x)} = -\dfrac{k.f'(x)}{f^2(x)}$.

**5. $[f^\nu(x)]' = \nu f^{\nu-1}(x).f'(x) \mid \nu \in N$.**

**Ἀπόδειξις.** Εἶναι: $f^\nu(x) = f(x).f(x) \ldots f(x)$ καὶ ἑπομένως:

$[f^\nu(x)]' = f'(x).f(x) \ldots f(x) + f(x)f'(x) \ldots f(x) + \ldots + f(x) \ldots f'(x) = \nu f^{\nu-1}(x).f'(x)$

**6. $\dfrac{(f_1.f_2 \ldots f_\nu)'}{f_1 f_2 \ldots f_\nu} = \dfrac{f'_1}{f_1} + \dfrac{f'_2}{f_2} + \ldots + \dfrac{f'_\nu}{f_\nu}$ μὲ $f_\nu(x) \neq 0$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ $\forall x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(f_\nu)$.**

**Ἀπόδειξις.** $\dfrac{(f_1 f_2 \ldots f_\nu)'}{f_1 f_2 \ldots f_\nu} = \dfrac{f'_1 f_2 \ldots f_\nu + f_1 f'_2 \ldots f_\nu + \ldots + f_1 f_2 \ldots f'_\nu}{f_1 f_2 \ldots f_\nu} =$

$$= \frac{f'_1}{f_1} + \frac{f'_2}{f_2} + \ldots + \frac{f'_\nu}{f_\nu}.$$

**Ὁρισμός.** *Καλοῦμεν λογαριθμικὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $f$ μὲ $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ τὸ πηλίκον $\dfrac{f'}{f}$.*

Συμφώνως τώρα πρὸς αὐτὸν τὸν ὁρισμὸν καὶ τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως 6, ἔχομεν τὴν πρότασιν.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. Ἡ λογαριθμικὴ παράγωγος ἑνὸς γινομένου συναρτήσεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαριθμικῶν παραγώγων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Εὕρετε τὰς παραγώγους τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:**

1) $f(x) = 2x^5+4x^3+2x - \lambda \mid \lambda \in R$

2) $f(x) = (4x^3+2x)(x^2+3x+1)$

3) $f(x) = \dfrac{4x^2-7x}{x^2+1}$

4) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

5) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$

6) $f(x) = (x^2+3)\varepsilon\varphi x + (2x+1)\eta\mu^2 x$

7) $f(x) = 2e^x + \log x$

**Ἀπάντησις.** 1) Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα ἀθροίσματος καὶ δυνάμεως μὲ ἐκθέτην φυσικὸν ἀριθμὸν καὶ ἔχομεν:

$$f'(x) = (2x^5)'+(4x^3)'+(2x)' - (\lambda)' = 10x^4+12x^2+2-0 = 10x^4+12x^2+2$$

2) $f'(x)=(4x^3+2x)'(x^2+3x+1)+(4x^3+2x)(x^2+3x+1)' = [(4x^3)'+(2x)'](x^2+3x+1)+$
$+(4x^3+2x)[(x^2)'+(3x)'+1'] = (12x^2+2)(x^2+3x+1)+(4x^3+2x)(2x+3)$

3) $f'(x) = \dfrac{(4x^2-7x)'.(x^2+1)-(x^2+1)'(4x^2-7x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(8x-7)(x^2+1)-2x(4x^2-7x)}{(x^2+1)^2}$

4) $f'(x) = \dfrac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2} =$

$= \dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2} = -\dfrac{2}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2} \quad \forall x \in \mathscr{D}(f)$

5) $f'(x) = (3\sigma\upsilon\nu x)'+(2\eta\mu x)' = -3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x$

6) $f'(x) = [(x^2+3)\varepsilon\varphi x]'+[(2x+1)\eta\mu^2 x]' = (x^2+3)'\varepsilon\varphi x+(x^2+3)(\varepsilon\varphi x)'+(2x+1)'.\eta\mu^2 x+$
$+(2x+1)(\eta\mu^2 x)' = 2x.\varepsilon\varphi x+(x^2+3)\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2\eta\mu^2 x+(2x+1)(\eta\mu x\eta\mu x)' = 2x\varepsilon\varphi x+$
$+\dfrac{x^2+3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2\eta\mu^2 x+(2x+1).2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x.$

7) $f'(x) = (2e^x+\log x)' = (2e^x)'+(\log x)' = 2e^x+\dfrac{1}{x}.$

## 12. 5 Παράγωγος συνθέτου συναρτήσεως

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f_1$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathscr{D}(f_1)$ καὶ συνεχῆ εἰς αὐτό. Καὶ τὴν συνάρτησιν $f_2$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathscr{D}(f_2)$ οὕτως ὥστε $R(f_1) \subset \mathscr{D}(f_2)$. Τότε ὑπάρχει ἡ σύνθετος συνάρτησις $f_2 o f_1$. Ἐὰν**

**ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος $f'_1(\xi)$ τῆς $f_1$ εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\mathfrak{D}(f_1)$ καὶ εἶναι πεπερασμένη καὶ ἐὰν εἰς τὴν θέσιν $f_1(\xi)$ ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος $f'_2[f_1(\xi)]$ τῆς $f_2$ καὶ εἶναι πεπερασμένη, τότε ὑπάρχει καὶ ἡ παράγωγος τῆς $f_2 o f_1$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\mathfrak{D}(f_1)$ καὶ ἰσχύει :**

$$[f_2(f_1(\xi)]' = f'_2[f_1(\xi)] . f'_1(\xi)$$

**Ἀπόδειξις.** Ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς $f_1$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\mathfrak{D}(f_1)$, θὰ ὑπάρχῃ καὶ τὸ $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi} = f'_1(\xi)$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν :

$$\delta_1(x) = \frac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi} - f_1'(\xi) \qquad (1)$$

μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathfrak{D}(f_1) - \{\xi\}$, τότε διὰ $x \to \xi$ θὰ εἶναι $\lim\limits_{x\to\xi}\delta_1(x) = 0$.

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$f_1(x) = f_1(\xi) + (x - \xi) [(f'_1(\xi) + \delta_1(x)]$$

μὲ $\delta_1(x) \to 0$, ὅταν $x \to \xi$.

Ἐπειδὴ τώρα ὑπάρχει καὶ ἡ παράγωγος τῆς $f_2$ εἰς τὴν θέσιν $f_1(\xi)\epsilon R(f_1) \subset \subset \mathfrak{D}(f_2)$ θὰ ὑπάρχῃ καὶ τό :

$$\lim_{f_1(x)\to f_1(\xi)} \frac{f_2[f_1(x)] - f_2[f_1(\xi)]}{f_1(x) - f_1(\xi)} = f'_2[f_1(\xi)].$$

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν :

$$\delta_2(x) = \frac{f_2[f_1(x)] - f_2[f_1(\xi)]}{f_1(x) - f_1(\xi)} - f'_2[f_1(\xi)] \qquad (2)$$

μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $R(f_1) - \{f_1(\xi)\}$ καὶ μὲ $\lim\limits_{f_1(x)\to f_1(\xi)}\delta_2(x) = 0$.

Πράγματι, ἀφοῦ ἡ $f_1$ εἶναι συνεχής, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = f_1(\xi)$ καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς $f_2$ εἰς τὴν θέσιν $f_1(\xi)$, θὰ εἶναι ἡ $f_2$ καὶ συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν καὶ ἑπομένως $\lim\limits_{x\to\xi} f_2[f_1(x)] = f_2[f_1(\xi)]$, ὁπότε καὶ $\delta_2(x) \to 0$, ὅταν $x \to \xi$.

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν :

$$f_2[f_1(x)] = f_2[f_1(\xi)] + [f_1(x) - f_1(\xi)] [\delta_2(x) + f'_2[f_1(\xi)]$$

μὲ $\delta_2(x) \to 0$, ὅταν $x \to \xi$.

Θὰ ἀναζητήσωμεν τώρα τό :

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f_2[f_1(x)] - f_2[f_1(\xi)]}{x - \xi}$$

δηλαδὴ θὰ ἀναζητήσωμεν τὴν παράγωγον τῆς $f_2 o f_1$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\mathfrak{D}(f)$ ἂν ὑπάρχῃ.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν:

$f_2[f_1(x)] - f_2[f_1(\xi)] = [f_1(x) - f_1(\xi)]\,[\delta_2(x) + f'_2[f_1(\xi)] = (x-\xi)\,[f'_1(\xi) + \delta_1(x)]$ $[\delta_2(x) + f'_2[f_1(\xi)] = (x-\xi)f'_1(\xi)f'_2[f_1(\xi)] + (x-\xi)\,[\delta_1(x)\delta_2(x) + \delta_2(x)\,(f'_1(\xi) + \delta_1(x)f'_2f_1(\xi)]$. Ἀλλὰ ὅταν $x \to \xi$, $\delta_1(x) \to 0$ καὶ $\delta_2(x) \to 0$, ὡς εἴδωμεν προηγουμένως, καὶ ἑπομένως:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_2[f_1(x)] - f_2[f_1(\xi)]}{x - \xi} = f'_2[f_1(\xi)] \, . \, f'_1(\xi).$$

Ἤτοι ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς $f_2 \circ f_1$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ καὶ εἶναι πεπερασμένη.

Ὁ τύπος ποὺ μᾶς δίδει τὴν παράγωγον τῆς συνθέτου συναρτήσεως $f_2 \circ f_1$, εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω:

$$(f_2[f_1(\xi)])' = f'_2[f_1(\xi)] \, . \, f'_1(\xi).$$

Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ ἔχουν παραγώγους $\forall x \in \mathcal{D}(f_1)$, τότε καὶ ἡ σύνθετος συνάρτησις $f = f_2 \circ f_1$ ἔχει παράγωγον $\forall x \in \mathcal{D}(f_1)$ καὶ ἰσχύει:

$$f' = f'_2(f_1) \, . \, f'_1$$

Οὕτως ἂν $f_1(x) = 3x^2 + 1$ καὶ $f_2(x) = \eta\mu x$ ἡ σύνθετος συνάρτησις $f_2 \circ f_1$ εἶναι ἡ:

$$f(x) = f_2[f_1(x)] = \eta\mu(3x^2+1).$$

Ἐὰν καλέσωμεν τὸ $3x^2 + 1 = t$, θὰ ἔχωμεν:

$$f(x) = f_2[f_1(x)] = f_2(t) = \eta\mu t \text{ μὲ } t = 3x^2+1.$$

Τότε, συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα, ἡ παράγωγος τῆς $f_2 \circ f_1 = f$ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x θὰ εἶναι:

$$f'(x) = f'_2(t) \, . \, f_1'(x) = (\eta\mu t)' \, . \, (3x^2+1)' = \sigma\upsilon\nu t(6x+1) = [\sigma\upsilon\nu(3x^2+1)] \, . \, (6x+1) =$$
$$= (6x+1)\sigma\upsilon\nu(3x^2+1).$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ τύπος τίθεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς ἁπλουστέραν μορφήν:

$$f_x' = \varphi'_t \, . \, \sigma_x'$$

Δηλαδὴ ὁ τόνος σημαίνει παράγωγον τῆς ἀντιστοίχου συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐξαρτᾶται ἡ ἀντίστοιχος συνάρτησις. Οὕτως ἂν ὑπάρχουν αἱ προϋποθέσεις, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν F ὡς σύνθεσιν τῶν συναρτήσεων φ, σ, h καὶ ὑπάρχουν αἱ προϋποθέσεις ὑπάρξεως παραγώγων $\forall x \in \mathcal{D}(h)$ καὶ εἶναι: $F(x) = \varphi(z)$, ὅπου $z = \sigma(t)$, ὅπου $t = h(x)$, δηλαδὴ εἶναι: $F = h[\sigma(\varphi(x)] = (\varphi \circ \sigma \circ h)\,(x)$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$F_x' = \varphi'_z \, . \, \sigma'_t \, . \, h'_x$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** *Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς* $F(x) = ημ^3(x^2+1)$.

**Ἀπάντησις.** Θέτομεν $F(x) = φ(z) = z^3$, ὅπου $z=σ(t)=ημt$, ὅπου $t = h(x) = x^2+1$. Τότε: $F(x) = φ[σ(h(x)] = [ημ(x^2+1)]^3 = ημ^3(x^2+1)$.

Ἡ παράγωγος θὰ εἶναι:

$F'(x) = φ'_z . σ'_t . h'_x = 3z^2 . συνt . (x^2+1)' = 3z^2 . συνt . (2x) = 3z^2 . συν(x^2+1) . 2x =$

$= 3ημ^2(t)συν(x^2+1) . 2x = 3ημ^2(x^2+1)συν(x^2+1) . 2x = 6xημ^2(x^2+1)συν(x^2+1)$.

Ἀντὶ τῆς ὡς ἄνω ἐργασίας ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς ἁπλουστέραν:

Ἔχομεν: $F(x) = ημ^3(x^2+1)$ καὶ θέτομεν $z = ημ(x^2+1)$, τότε $F'(x) = (z^3)' = 3z^2 . z' = 3ημ^2(x^2+1) . [ημ(x^2+1)]'$. Θέτομεν $x^2+1 = ω$ καὶ ἔχομεν: $F'(x) = 3ημ^2(x^2+1)(ημω)' = 3ημ^2(x^2+1)\ (συνω)ω' = 3ημ^2(x^2+1)συν(x^2+1) . (x^2+1)' = 3ημ^2(x^2+1)\ συν(x^2+1)\ (2x) = 6xημ^2(x^2+1)συν(x^2+1)$, ποὺ εἶναι προφανῶς ἡ ἀνωτέρω ἐργασία συντομευμένη.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** *Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς* $f(x) = ημ[συν(x^4+1)]$ *(ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὑπάρχει ἡ παράγωγος ἐν* $\mathscr{D}(f)$*)*.

**Ἀπάντησις.** Θέτομεν $συν(x^4+1) = φ$ καὶ τότε: $f'(x) = (ημφ)' = συνφ . φ' = συν(συν(x^4+1)) . (συν(x^4+1))'$. Θέτομεν: $x^4+1=y$ καὶ ἔχομεν: $f'(x)=συν(συν(x^4+1))$. $(συνy)' = συν(συν(x^4+1)) . (-ημy) . y' = -συν(συν(x^4+1))ημy . y' = -συν(συν(x^4+1))\ ημ(x^4+1) . (x^4+1)' = -4x^3 . συν(συν(x^4+1))ημ(x^4+1)$.

*Σημείωσις.* Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως 5 δύναται νὰ γίνῃ καὶ μὲ τὴν μέθοδον διὰ τῶν ἀκολουθιῶν.

## 12. 6 Παράγωγος ἀντιστρόφου συναρτήσεως

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον $y=f(x)$ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ $\mathscr{D}(f)$ καὶ πεδίου τιμῶν $R(f)$, ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς καὶ γνησίως μονότονος ἐπὶ τοῦ $\mathscr{D}(f)$. Ἐὰν $f^{-1}$ εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς f μὲ τύπον $x=f^{-1}(y)$ καὶ ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=ξ\in\mathscr{D}(f)$ καὶ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς (ἤτοι $f'(ξ) \neq 0$), τότε θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ παράγωγος τῆς $f^{-1}$ εἰς τὴν θέσιν $η = f(ξ)\in R(f)$ καὶ θὰ ἰσχύῃ:**

$$(f^{-1}(η))' = \frac{1}{f'(ξ)}$$

**Ἀπόδειξις.** Ὡς γνωστόν, ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων, ὅταν $ξ\in\mathscr{D}(f)$, τότε $f(ξ)\in R(f)$, ἤτοι $η\in R(f)$ καὶ ἂν $η\in R(f)$, τότε $f^{-1}(η) = ξ\in\mathscr{D}(f)$.

Ἰσχύουν ἑπομένως τὰ ἑξῆς:

$$\forall x\in\mathscr{D}(f) \text{ θὰ εἶναι: } y = f(x)\in R(f) \text{ καὶ}$$

$$\forall y\in R(f) \text{ θὰ εἶναι: } f^{-1}(y) = x\in\mathscr{D}(f)$$

καὶ συνεπῶς:

$$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$$

καὶ

$$f[f^{-1}(y)] = f(x) = y.$$

Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς $f^{-1}$ εἰς τὴν θέσιν $y = \eta \in R(f)$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, ὅπου $\eta = f(\xi)$.

Ἀναζητοῦμεν, ἂν ὑπάρχῃ, τό :

$$\lim_{y \to \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} \quad \text{μὲ } y \neq \eta \tag{1}$$

Ἐπειδὴ κατ' ἀρχὴν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=\xi \in \mathscr{D}(f)$ καὶ εἶναι $x \neq \xi$, καὶ ἐπειδὴ ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ γνησίως μονότονος ἐπὶ τοῦ $\mathscr{D}(f)$, θὰ εἶναι καὶ ἡ $f^{-1}$ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ R(f) καὶ γνησίως μονότονος ἐπ' αὐτοῦ καὶ μάλιστα τοῦ αὐτοῦ εἴδους μοντονίας.

Τότε ὅμως θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$f(x) \neq f(\xi) \Rightarrow y \neq \eta \text{ καὶ } f^{-1}(y) \neq f^{-1}(\eta).$$

Ὥστε ἂν $y \neq \eta \iff x \neq \xi$, ὅπου $x = f^{-1}(y)$ καὶ $\xi = f^{-1}(\eta)$ καὶ ἀκόμη, ὅτι ἂν $y \to \eta \Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\eta) \Rightarrow x \to \xi$.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν τὸ ὅριον (1), ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ τὸ ὅριον :

$$\lim_{x \to \xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} \quad \text{μὲ } x \neq \xi.$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν :

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \neq 0.$$

Ἑπομένως :

$$\lim_{y \to \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x \to \xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \left[\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right]^{-1} =$$

$$= [f'(\xi)]^{-1} = \frac{1}{f'(\xi)}.$$

Ὥστε τελικῶς ἔχομεν :

$$[f^{-1}(n)]' = \frac{1}{f'(\xi)}$$

Ἐὰν τώρα ἡ f ἔχῃ παράγωγον $\forall x \in \mathscr{D}(f)$ καὶ ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις, τότε καὶ ἡ $f^{-1}$ ἔχει παράγωγον $\forall y \in R(f)$ καὶ ἰσχύει :

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall y \in R(f), \text{ ὅπου } y = f(x)$$

Καὶ εὐκολώτερον : Ἡ παράγωγος τῆς $f^{-1}(y)$ ὡς πρὸς y εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς παραγώγου τῆς f(x) ὡς πρὸς x.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως τῆς f μὲ $f(x) = 4x^3$.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = 4x^3$ εἶναι συνεχὴς καὶ παντοῦ παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ R καὶ ἡ συνάρτησις παράγωγος αὐτῆς εἶναι : $f'(x) = 12x^2$, ἡ ὁποία προφα-

νῶς εἶναι 0 εἰς τὴν θέσιν $x = 0 \in \mathfrak{D}(f)$. Ἡ ἀντίστροφος τῆς f ὑπάρχει καὶ ἂν $y = 4x^3$ εἶναι ἡ $x = \sqrt[3]{\frac{y}{4}}$ καὶ ἡ ὁποία δι᾽ ἐναλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν γίνεται: $y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$.

Ζητοῦμεν τὴν παράγωγον τῆς $y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}} = y$ δηλαδὴ τὴν $f'(x)$, θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν παράγωγον τῆς $f^{-1}(y) = 4y^3$ ποὺ εἶναι $[f^{-1}(y)]' = 12y^2$, θὰ θέσωμεν ὅπου y τὸ $\sqrt[3]{\frac{x}{4}}$ καὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐξαγομένου αὐτοῦ διὰ $x \neq 0$ θὰ εἶναι ἡ παράγωγος $f'(x)$.

Ἑπομένως: $f'(x) = \dfrac{1}{12\left(\sqrt[3]{\frac{x}{4}}\right)^2} = \dfrac{1}{12\sqrt[3]{\frac{x^2}{16}}}$ $\forall x \in \mathfrak{D}(f) - \{0\}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) =$ τοξ$_0$ημx.**

**Ἀπάντησις.** Γνωρίζομεν ὅτι ἡ $y =$ τοξ$_0$ημx εἶναι παντοῦ ὡρισμένη $\forall x \in R$: $-1 \leq x \leq 1$. Ἐπίσης γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι καὶ ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς $x =$ ημy μὲ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, ἡ ὁποία, ὡς γνωστόν, εἶναι γνησίως αὔξουσα καὶ παραγωγίσιμος $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Κατόπιν τούτου θὰ ἔχωμεν:

$$(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)' = y \Rightarrow x = \text{ημ}y$$

Θὰ πρέπει ἡ παράγωγος τῆς ημy ὡς πρὸς y νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίστροφον τῆς παραγώγου τῆς f(x) ὡς πρὸς x.

Ἄρα: $(\text{ημ}y)'_y = \dfrac{1}{(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)_x} \Rightarrow (\text{τοξ}_0\text{ημ}x)' = \dfrac{1}{\text{συν}y}$ | συνy $\neq 0$ καὶ τελικῶς:

$$(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, +1).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = \log_a x$ μὲ $a > 0$ $a \neq 1$ καὶ $x \in R^+$.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ συνάρτησις $f(x) = y = \log_a x$ ἔχει, ὡς γνωστόν, ἀντίστροφον τὴν $x = a^y = f^{-1}(y)$. Εἶναι δὲ γνωσταὶ καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτῶν ἰδιότητες. Θὰ πρέπει τώρα ἡ παράγωγος τῆς $f^{-1}(y) = a^y$ ὡς πρὸς y νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίστροφον τῆς παραγώγου τῆς $f(x) = \log_a x$ ὡς πρὸς x.

Ἑπομένως: $(a^y)'_y = \dfrac{1}{(\log_a x)_x'} \Rightarrow (\log_a x)' = \dfrac{1}{(a^y)'} = a^y.\log a$ (βλέπε παράδειγμα 11 προηγουμένης παραγράφου).

Ὥστε $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ $\forall x \in R^+$ $a > 0$ $a \neq 1$. Βεβαίως τὴν παράγωγον τῆς $f(x) = \log_a x$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ κατ᾽ ἄλλον τρόπον ὡς ἑξῆς:

Ἔχομεν: $f(x) = \frac{\log x}{\log \alpha}$ καὶ ἐπομένως:

$$f'(x) = \frac{(\log x)' . \log \alpha - (\log \alpha)' . \log x}{(\log \alpha)^2} = \frac{\frac{1}{x} . \log \alpha}{(\log \alpha)^2} = \frac{1}{x \log \alpha} . \ \forall x \in R^+ \ (\alpha \neq 1, \ \alpha > 0).$$

## Παρατηρήσεις

**1)** Ἐὰν ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$ ἔχῃ παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, αὐτὸ δὲν σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν καὶ αἱ παράγωγοι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$. Ἑπομένως ἂν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, τότε θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ ὄχι ὅμως καὶ ἀντιστρόφως.

Ἤτοι **ἱκανὴ συνθήκη** ὄχι ὅμως καὶ ἀναγκαία διὰ τὴν ὕπαρξιν τῆς παραγώγου τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ εἶναι νὰ ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν f μὲ $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ μὲ τύπους ἀντιστοίχως:

$$f_1(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x} & \text{ἂν } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ἂν } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{ἂν } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ἂν } x < 0 \end{cases}$$

Ἡ συνάρτησις $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$ ἔχει τύπον $f(x) = x \ \forall x \in R$.

Ἡ συνάρτησις $f(x) = x$ ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0 \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) = R$, ἐνῷ ἡ $f_2$ δὲν ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=0$ (βλέπε παραδ. 8).

**2)** Ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν γινομένου συναρτήσεων.

Οὕτως ἂν $f(x) = f_1(x).f_2(x)$ καὶ ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ τοῦτο δὲν σημαίνει ἀναγκαίως, ὅτι καὶ αἱ $f_1, f_2$ ἔχουν παραγώγους εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ μὲ τύπους ἀντιστοίχως:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^2} & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 3 & \text{ἂν } x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 3 & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$$

Προφανῶς ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = f_1(x).f_2(x) = 3 \ \forall x \in R$ ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0$, ἐνῶ αἱ $f_1, f_2$ δὲν ἔχουν παραγώγους εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

**3)** Ἀναφερόμενοι εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς συνθέτου συναρτήσεως

$F = f_2 \circ f_1$ τῶν δύο συναρτήσεων $f_1$ καὶ $f_2$ ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς. Ἐὰν ἡ F ἔχῃ παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, τοῦτο δὲν σημαίνει ἀναγκαίως, ὅτι καὶ ἑκάστη τούτων ἔχει ἀντιστοίχως παράγωγον εἰς τὴν θέσιν ξ καὶ f(ξ).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μέ:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ἂν } x \geqq 1 \\ 5x - 3 & \text{ἂν } x < 1 \end{cases}$$

Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις $f^{-1}$ αὐτῆς εἶναι ἡ:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{ἂν } x \geqq 2 \\ \dfrac{x + 3}{5} & \text{ἂν } x < 2 \end{cases}$$

Προφανῶς ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = 1$ δὲν ἔχει παράγωγον καθὼς καὶ ἡ $f^{-1}$ εἰς τὴν θέσιν $x = f(1) = 2$ δὲν ἔχει ἐπίσης παράγωγον παρὰ ταῦτα ἡ σύνθεσις αὐτῶν $f^{-1}[f(x)] = x$ ἔχει παράγωγον $\forall x \in R$.

**4)** Εἰς τὴν περίπτωσιν παραγώγου τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως $f^{-1}$ τῆς συναρτήσεως f διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ $[f^{-1}(\eta)]'$ θὰ πρέπει ἡ f νὰ **εἶναι γνησίως αὔξουσα** εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $\xi \in \mathcal{D}(f)$, διότι θὰ ὑπῆρχε x μὲ $x \neq \xi$ οὕτως ὥστε $f(x) = f(\xi)$.

**5)** Ἐὰν κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς παραγώγου τῆς $f^{-1}$ ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ καὶ εἶναι $f'(\xi) = 0$, τότε ἡ παράγωγος τῆς $f^{-1}$ εἰς τὴν θέσιν f(ξ) εἶναι ἄπειρος καὶ ἂν ἡ f αὔξουσα, εἶναι $+\infty$, ἐνῷ ἂν ἡ f φθίνουσα, εἶναι $-\infty$.

Ἐπίσης ἂν ἡ $f'(\xi)$ εἶναι ἄπειρος, τότε ἡ παράγωγος τῆς $f^{-1}$ εἰς τὴν θέσιν f(ξ) ὑπάρχει καὶ εἶναι μηδενική.

**6)** Ἐὰν $f_1(x) = f_2(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, τότε καὶ $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi} =$

$= \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f_2(x) - f_2(\xi)}{x - \xi}$, $x \neq \xi$, καὶ ἑπομένως $f'_1(x) = f'_2(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$.
Ἤτοι ἂν δύο συναρτήσεις εἶναι ἴσαι εἰς ἕνα διάστημα Δ τοῦ κοινοῦ πεδίου ὁρισμοῦ των, τότε καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἴσαι $\forall x \in \Delta$, (ἐφ' ὅσον ἐννοεῖται ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x \in \Delta$).

**7)** Ἐὰν συνεπῶς εἶναι: $f_1[f_2(x)] = f_3(x)$ εἰς ἕνα διάστημα Δ τοῦ κοινοῦ πεδίου ὁρισμοῦ των τότε θὰ ἔχωμεν:

$$f'_1(f_2(x)] \cdot f_2'(x) = f'_3(x)$$

(ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα).

Ἐφαρμογή : Ἔστω $f(x) = \text{τοξ}_0\text{ημ}x$ μὲ $x\epsilon[-1, 1]$, τότε : $x = \text{ημ}f(x)$ καὶ ἑπομένως :

$$x' = (\text{ημ}f(x))' \Rightarrow 1 = \text{συν}f(x).f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\text{συν}f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2 f(x)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x\epsilon(-1, 1). \quad \left(\text{Προφανῶς } f(x)\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

## 12. 7 Συγκεντρωτικὸς πίναξ τῶν παραγώγων τῶν πλέον βασικῶν συναρτήσων

1. $f(x) = c \mid \mathcal{D}(f) = R \Rightarrow f'(x) = 0$

2. $f(x) = \alpha x^\nu \;\Big|\; \mathcal{D}(f) = R - \{0\},\ \alpha\epsilon R,\ \nu\epsilon Z \Rightarrow f'(x) = \alpha\nu x^{\nu-1}$

3. $f(x) = \log x \mid \mathcal{D}(f) = R^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \log_\alpha x \;\Big|\; \mathcal{D}(f) = R^+,\ \alpha\epsilon R^+ - \{1\} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\log\alpha}$

5. $f(x) = e^x \mid \mathcal{D}(f) = R \Rightarrow f'(x) = e^x$

6. $f(x) = \alpha^x \;\Big|\; \mathcal{D}(f) = R,\ \alpha\epsilon R^+ \Rightarrow f'(x) = \alpha^x\log\alpha$

7. $f(x) = x^k \;\Big|\; \mathcal{D}(f) = R^+,\ k\epsilon R \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$

8. $f(x) = x^x \mid \mathcal{D}(f) = R^+ \Rightarrow f'(x) = x^x(1+\log x)$

9. $f(x) = \text{ημ}x \mid \mathcal{D}(f) = R \Rightarrow f'(x) = \text{συν}x$

10. $f(x) = \text{συν}x \mid \mathcal{D}(f) = R \Rightarrow f'(x) = -\text{ημ}x$

11. $f(x) = \text{εφ}x \mid \mathcal{D}(f) = R - \left\{x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k\epsilon Z\right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$

12. $f(x) = \text{σφ}x \mid \mathcal{D}(f) = R - \{x = k\pi,\ k\epsilon Z\} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$

13. $f(x) = \sqrt[\nu]{x} \;\Big|\; \mathcal{D}(f) = R^+$, ν ἄρτιος φυσικός : $\nu \geq 2$; $\mathcal{D}(f) = R$, ν περιττὸς φυσικὸς $\Rightarrow f'(x) =$

$$= \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}} \quad \text{(ἂν ν περιττὸς } x \neq 0\text{)}$$

**14.** $f(x)=[f_1(x)]^k$ μὲ $\mathcal{D}(f)=\{x\in R : f_1(x)>0\}$ καὶ $k\in R \Rightarrow f'(x)=k[f_1(x)]^{k-1}f'_1(x)$

**15.** $f(x)=e^{f_1(x)}$ μὲ $\mathcal{D}(f)=\{x\in R : x\in\mathcal{D}(f_1)\} \Rightarrow f'(x)=e^{f_1(x)}.f_1'(x)$

**16.** $f(x)=\log[f_1(x)] \mid \mathcal{D}(f)=\{x\in R : x\in\mathcal{D}(f_1)$ μὲ $f_1(x)>0\} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{f_1(x)}\cdot f'_1(x)$

**17.** $f(x)=\alpha^{f_1(x)} \mid \mathcal{D}(f)=\{x\in R : x\in\mathcal{D}(f_1)\}$ μὲ $\alpha>0 \Rightarrow f'(x)=\alpha^{f_1(x)}.f'_1(x).\log\alpha$

**18.** $f(x)=[f_1(x)]^{f_2(x)} \mid \mathcal{D}(f)=\{x\in R : x\in\mathcal{D}(f_1)\cap\mathcal{D}(f_2)$ καὶ $f_1(x)>0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=[f_1(x)]^{f_2(x)}\left(f_2'(x)\log f_1(x)+\frac{f'_1(x)}{f_1(x)}f_2(x)\right)$$

**19.** $f(x)=\text{τοξ}_0\text{ημ}x \mid \mathcal{D}(f)=[-1,+1] \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \forall x\in(-1,1)$

**20.** $f(x)=\text{τοξ}_0\text{συν}x \mid \mathcal{D}(f)=[-1,+1] \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \forall x\in(-1,+1)$

**21.** $f(x)=\text{τοξ}_0\text{εφ}x \mid \mathcal{D}(f)=R \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\quad \forall x\in R$

**22.** $f(x)=\text{τοξ}_0\text{σφ}x \mid \mathcal{D}(f)=R \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\quad \forall x\in R$

**Ἀποδείξεις τῶν ἀνωτέρω**

1) Βλέπε παράδ. 1 § 12.3.

2) Ἐὰν $\nu\in N$, τότε $f'(x)=(\alpha x^\nu)'=\alpha'(x^\nu)+\alpha(x^\nu)'=0+\alpha.\nu x^{\nu-1}$ (παράδ. § ..) ἄρα $f'(x)=\alpha\nu x^{\nu-1}$. Ἐὰν $\nu=0$, τότε $f(x)=\alpha \Rightarrow f'(x)=0$ καὶ ἰσχύει προφανῶς καὶ πάλιν ὁ τύπος $f'(x)=\alpha\nu x^{\nu-1}$ $\forall x\in R-\{0\}$. Ἐὰν $\nu\in Z^-$, τότε ἂν $\nu=-\mu$ μὲ $\mu\in N$ θὰ ἔχωμεν:

$$f'(x)=(\alpha x^{-\mu})'=\left(\frac{\alpha}{x^\mu}\right)'=\frac{\alpha'\cdot x^\mu-\alpha(x^\mu)'}{x^{2\mu}}=\frac{-\alpha\mu x^{\mu-1}}{x^{2\mu}}=$$

$$=-\alpha.\mu x^{-\mu-1}=\alpha(-\mu).x^{-\mu-1}=\alpha\nu x^{\nu-1}.$$

3) Βλέπε παράδ. 12 § 12.3.

4) Βλέπε παράδ. 3 § 12.3.

5) Βλέπε παράδ. 10 § 12.3.

6) Βλέπε παράδ. 11 § 12.3.

7) Ἔχομεν $f(x)=x^k=e^{k\log x}$. Ἐὰν τεθῇ $f_1(x)=k\log x$ καὶ $f_2(x)=e^x$, τότε $f(x)=f_2[f_1(x)]$ καὶ ἑπομένως πρόκειται περὶ συνθέτου συναρτήσεως.

Ὥστε $f'(x) = (e^t)'.t'$, ὅπου $t = k\log x$, ἤτοι:

$$f'(x) = e^{k\log x}\cdot(k\log x)' = e^{k\log x}\cdot k\cdot\frac{1}{x} = x^k\cdot k\cdot\frac{1}{x} = kx^{k-1}.$$

Ἄρα $\forall x \in R^+$ καὶ $\forall k \in R$(σταθ.) ἰσχύει: $(x^k)' = kx^{k-1}$.

8) Ἔχομεν: $f'(x) = (x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(x\log x)' = e^{x\log x}(x'\log x + x(\log x)'] = x^x(\log x+1)$.

9) Βλέπε παράδ. 9 § 12.3.

10) Ὁμοίως.

11) Ἔχομεν: $f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ $\forall x \in \mathscr{D}(f)$.

12) Ἔχομεν: $f'(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ $\forall x \in \mathscr{D}(f)$.

13) Ἔχομεν: $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)' = \frac{1}{\nu}x^{\frac{1}{\nu}-1} = \frac{1}{\nu}x^{-\frac{\nu-1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}}$.

14) Ἔχομεν $f(x) = [f_1(x)]^k = e^{k\log f_1(x)}$ καὶ ἑπομένως ἂν τεθῇ $k\log f_1(x) = t$, θὰ ἔχωμεν: $f'(x) = (e^t)' = e^t.t' = e^{k\log f_1(x)}(k\log f_1(x)]'$. Καὶ ἂν τεθῇ $f_1(x) = z$ θὰ ἔχωμεν: $f'(x) = [f_1(x)]^k.(k\log z)' = [f_1(x)]^k\cdot k\frac{1}{z}\cdot z' = [f_1(x)]^k\cdot k\cdot\frac{1}{f_1(x)}\cdot f'_1(x) = k[f_1(x)^{k-1}.f_1'(x)$.

Ὑποτιθεμένου βεβαίως ὅτι ὑπάρχει ἡ παράγωγος $\forall x \in \mathscr{D}(f)$ καὶ τῆς t καὶ τῆς z.

15) Ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω: $f'(x) = e^{f_1(x)}.f_1'(x)$

16) Ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω: $f'(x) = \frac{1}{f_1(x)}\cdot f_1'(x) = \frac{f'_1(x)}{f_1(x)}$. Ἐξ οὗ καὶ **ἡ ὀνομασία λογαριθμικὴ παράγωγος.**

17) Ἔχομεν: $f'(x) = (e^{f_1(x)\log\alpha})' = e^{f_1(x)\log\alpha}.[f_1(x)\log\alpha]' = \alpha^{f_1(x)}.\log\alpha.f_1'(x)$

18) Ἔχομεν: $f'(x) = (e^{f_2(x).\log f_1(x)})' = e^{f_2(x)\log f_1(x)}.[f_2(x).\log f_1(x)]' =$

$$= [f_1(x)]^{f_2(x)}\left(f_2'(x)\log f_1(x) + f_2(x)\cdot\frac{1}{f_1(x)}f'_1(x)\right) = [f_1(x)]^{f_2(x)}$$

$$\left(f'_2(x)\log f_1(x) + \frac{f'_1(x)}{f_1(x)}f_2(x)\right)$$

19) Βλέπε παράδ. 2 § ....

20) Ἔχομεν : $f'(x) = (\text{τοξ}_0\text{συν}x)' = \dfrac{1}{(\text{συν}y)_y'}$ (ὅπου συν$y = x$) =

$$= \frac{1}{-\text{ημ}y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\text{συν}^2 y}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, +1).$$

21) Ἔχομεν : $f'(x) = (\text{τοξ}_0\text{εφ}x)' = \dfrac{1}{(\text{εφ}y)_y'}$ (ὅπου εφ$y = x$) =

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\text{συν}^2 y}} = \text{συν}^2 y = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R.$$

22) Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι : $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in R$.

## 12. 8 Παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως

Εἴδωμεν εἰς τὰ προηγούμενα, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως f, ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μίαν συνάρτησιν f′, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν συνάρτησιν πρώτης παραγώγου τῆς f, τῆς ὁποίας τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ τῆς f καὶ δι' ἐκεῖνα μόνον τὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{D}(f)$ διὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f. Καὶ ἀναλόγως ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν δευτέραν παράγωγον τῆς f ὡς παράγωγον τῆς πρώτης παραγώγου f′ κ.ο.κ. Καὶ γενικῶς :

Μία συνάρτησις f θὰ εἶναι ν-φορὰς παραγωγίσιμος ἐπὶ μιᾶς περιοχῆς π(ξ) τοῦ σημείου ξ, ἐὰν εἶναι (ν — 1)φορὰς παραγωγίσιμος εἰς τὸ σημεῖον ξ τῆς περιοχῆς π(ξ) καὶ ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $f^{(\nu-1)}(x) = y$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \pi(\xi)$.

**Ὁρισμὸς 1.** *Μία συνάρτησις f θὰ λέγεται ν-φορὰς συνεχῶς παραγωγίσιμος εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \pi(\xi)$, ὅταν αὐτὴ εἶναι ν-φορὰς παραγωγίσιμος καὶ ἡ $y = f^{(\nu)}(x)$ εἶναι καὶ συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \pi(\xi)$.*

**Ὁρισμὸς 2.** *Μία συνάρτησις f θὰ λέγεται ἀπειράκις παραγωγίσιμος εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \pi(\xi)$, ὅταν ἔχῃ παράγωγον πάσης τάξεως εἰς τὸ σημεῖον $\xi \epsilon \pi(\xi)$.*

**Παρατηρήσεις**

**α)** Ἐὰν ἀναζητῶμεν π.χ. τὴν δευτέρας τάξεως παράγωγον τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον $\xi \epsilon \mathcal{D}(f)$, θὰ πρέπει :

1. ἡ f νὰ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $\xi \epsilon \mathcal{D}(f)$, δηλαδὴ $\xi \epsilon \pi(\xi) \subseteq \mathcal{D}(f)$

2. Τὸ ξ νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς πρώτης παραγώγου, ποὺ θὰ συμβαίνῃ τὸ (2) ἂν συμβαίνῃ τὸ (1).

Ὥστε ἂν ἀναζητοῦμεν τὴν ν-οστὴν παράγωγον τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $\xi\in\mathscr{D}(f)$, θὰ πρέπει ἡ τάξεως (ν—2) παράγωγος συνάρτησις νὰ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς μίαν περιοχὴν π(ξ) τοῦ ξ, ὥστε τὸ ξ νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς (ν — 1) τάξεως παραγώγου συναρτήσεως.

**β)** Ἐὰν μία συνάρτησις f εἶναι παραγωγίσιμος εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος (α, β), ν φοράς, τότε ὑπάρχει καὶ ἡ συνάρτησις παράγωγος $y = f^{(\nu)}(x)$, δηλαδὴ ἡ συνάρτησις ν-οστῆς παραγώγου.

**γ)** Ἐὰν μία συνάρτησις f ἔχῃ παραγώγους εἰς ἕνα σημεῖον $\xi\in\Delta$, ὅπου Δ ἕνα ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ $\mathscr{D}(f)$, μέχρι τάξεως τινὸς δὲν ἕπεται ὅτι θὰ ἔχῃ καὶ παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $\xi\in\Delta$ καὶ εἰς τὴν ἀμέσως ἑπομένην τάξιν. Οὕτως ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x)=x^{\frac{7}{3}}$ ἔχει πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0$, δὲν ἔχει ὅμως παράγωγον τρίτης ἢ ἀνωτέρας τάξεως εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

**δ)** Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἐὰν μία συνάρτησις f ἔχῃ εἰς ἕνα ἀνοικτὸν διάστημα παραγώγους πάσης τάξεως, τότε ἡ k-τάξεως παράγωγος τῆς ν-τάξεως παραγώγου τῆς f εἶναι ἡ (ν+k)-τάξεως παράγωγος τῆς f.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** ***Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = e^x$ εἶναι παραγωγίσιμος ἀπείρους φορὰς καὶ προφανῶς συνεχής.***

**Ἀπάντησις.** Ἡ $f(x) = e^x$ εἶναι συνεχὴς $\forall x\in R$ καὶ ὑπάρχει ἡ παράγωγος αὐτῆς $f'(x) = e^x$ $\forall x\in R$. Ἑπομένως εἶναι συνεχῆς καὶ ἀπείρους φορὰς παραγωγίσιμος $\forall x\in R$. Ὥστε: $(e^x)^{(\nu)} = e^x$ $\forall x\in R$ καὶ $\forall \nu\in N$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** ***Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \alpha^x$ ($\alpha>0$ $\alpha\neq1$) εἶναι ἀπείρους φορὰς παραγωγίσιμος καὶ συνεχὴς $\forall x\in R$.***

**Ἀπάντησις.** Ἡ $f(x) = \alpha^x$ εἶναι συνεχὴς $\forall x\in R$ καὶ ὑπάρχει ἡ παράγωγος αὐτῆς $f'(x) = \alpha^x \log\alpha$ $\forall x\in R$. Εἶναι δὲ ἡ συνάρτησις f′ συνεχὴς $\forall x\in R$. Ἡ $f''(x)=\alpha^x(\log\alpha)^2$ κ.ο.κ. καὶ $f^{(\nu)}(x)=\alpha^x(\log\alpha)^\nu$ $\forall x\in R$ καὶ $\forall \nu\in N$, πάντοτε συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ R.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** ***Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \eta\mu x$ εἶναι παραγωγίσιμος συνεχῶς ἀπείρους φορὰς $\forall x\in R$. Ἰσχύει δέ:***

$$(\eta\mu x)^{(\nu)} = \eta\mu\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x\in R,\ \forall \nu\in N$$

**Ἀπάντησις.** Ἡ $f(x) = \eta\mu x$ εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x\in R$ καὶ εἶναι:

$$f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Εἶναι ἡ f′ συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x\in R$. Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι:

$$f^{(k)}(x) = (\eta\mu x)^{(k)} = \eta\mu\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),\ k\in N$$

τότε: $f^{(k+1)}(x) = [(\eta\mu x)^{(k)}]' = \left[\eta\mu\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)' =$

$= \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left((x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, όπότε $\forall\nu\in N$ θά ίσχύη:

$$(\eta\mu x)^{(\nu)} = \eta\mu\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right)$$

καί έπομένως είναι συνεχῶς παραγωγίσιμος άπείρους φοράς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ἡ συνάρτησις f μέ f(x) = συνx είναι συνεχῶς παραγωγίσιμος άπείρους φοράς καί ίσχύει:**

$$(\sigma\upsilon\nu x)^{(\nu)} = \sigma\upsilon\nu\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x\in R, \forall\nu\in N.$$

**Ἀπάντησις.** Ὁμοίως ὡς ἄνω.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ἡ συνάρτησις ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x είναι συνεχῶς παραγωγίσιμος ἀπείρους φοράς ἐπί τοῦ R. Ἐάν δέ $\nu\in N$ ὁ βαθμός αὐτοῦ, τότε ἡ τάξεως $\nu+1$ παράγωγος αὐτοῦ καί πᾶσαι αἱ ἑπόμεναι είναι μηδενικαί.**

**Ἀπάντησις.** Ἔστω $f(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_\nu x^\nu$ προφανῶς συνεχής καί παραγωγίσιμος διά $\forall x\in R$. Ἔχομεν: $f'(x) = \alpha_1+2\alpha_2x+\ldots+\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}$ προφανῶς συνεχής καί παραγωγίσιμος $\forall x\in R$. Ἐπίσης είναι: $f''(x) = 2\alpha_2+2.3\alpha_3x^2+\ldots+\nu(\nu-1)\alpha_\nu x^{\nu-2}$ κ.ο.κ.

$$f^{(\nu)}(x) = 1.2.3\ldots\nu\alpha_\nu = \nu!.\alpha_\nu$$

Ἐνῷ $f^{(\nu+1)}(x)=0$ καθώς καί πᾶσαι αἱ λοιπαί παράγωγοι αἱ πέραν τῆς τάξεως $(\nu+1)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Νά εὑρεθοῦν αἱ διαδοχικαί παράγωγοι τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \lambda e^{\lambda x}, \lambda\in R-\{0\}$.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν: $f'(x) = \lambda(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}(\lambda x)' = \lambda^2e^{\lambda x}$.
$f''(x) = \lambda^2(e^{\lambda x})' = \lambda^2.\lambda.e^{\lambda x} = \lambda^3e^{\lambda x}$ καί εὐκόλως $f^{(\nu)}(x) = \lambda^{\nu+1}.e^{\lambda x}$.
Είναι συνεπῶς συνεχῶς παραγωγίσιμος $\forall x\in R$ άπείρους φοράς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & \text{ἄν } x\neq 0 \\ 0 & \text{ἄν } x=0 \end{cases}$$

**Εὕρετε τά f′(0), f″(0), ἄν ὑπάρχουν.**

**Ἀπάντησις.** Διά $x\neq0$ ἔχομεν: $f'(x) = \left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)' = 2x\eta\mu\frac{1}{x}+x^2\left(\eta\mu\frac{1}{x}\right)' =$

$= 2x\eta\mu\frac{1}{x}+x^2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = 2x\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\cdot\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} = 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

Ἀλλά: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x} = \lim\limits_{x\to0}x\eta\mu\frac{1}{x} = 0 = f'(0)$.

Καί ἡ συνάρτησις πρώτη παράγωγος είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & \text{ἄν } x\neq 0 \\ 0 & \text{ἄν } x=0. \end{cases}$$

Ἐπειδὴ ὅμως: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} - 0}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(2\eta\mu\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$ τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, δὲν ὑπάρχει, ἕπεται ὅτι ἡ f δὲν ἔχει δευτέραν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

## 12. 9 Παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως ἀθροίσματος καὶ γινομένου δύο συναρτήσεων. Τύπος τοῦ Leibniz

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι ν φορὰς παραγωγίσιμοι εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$, ὅπου ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον ἑνὸς ἀνοικτοῦ διαστήματος $\Delta \subseteq \mathcal{D}(f_2) \cap \mathcal{D}(f_1)$, τότε καὶ ἡ συνάρτησις:**

$$f = kf_1 + \lambda f_2 \quad (k, \lambda \epsilon R)$$

**εἶναι ἐπίσης ν φορὰς παραγωγίσιμος εἰς τὸ ξεΔ.**

**Ἀπόδειξις.** Πολὺ ἁπλῆ. Ἰσχύει δηλαδή:

$$f^{(\nu)} = kf_1^{(\nu)} + \lambda f_2^{(\nu)}$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. Ὁμοία πρότασις καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν $f = \frac{f_1}{f_2}$ ἀρκεῖ $f_2(\xi) \neq 0$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν:

$$f' = \frac{f'_1 f_2 - f'_2 f_1}{f_2^2}, \quad f'' = \frac{(f'_1 f_2 - f'_2 f_1)' f_2^2 - (f_2^2)'(f'_1 f_2 - f'_2 f_1)}{f_2^4} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἤτοι πάντοτε τῆς μορφῆς: $\frac{F_1}{F_2}$ μὲ $F_2(\xi) \neq 0$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. Ὁμοία πρότασις καὶ διὰ τὴν $f = f_1 . f_2$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν: $f' = f_1' f_2 + f_2' f_1$, $f'' = f_1'' f_2 + f_2' f_1' + f_2'' f_1 + f_2' f_1' =$ $= f_1'' f_2 + 2f_1' f_2' + f_2'' f_1$, $f''' = f_1''' f_2 + 3f_1'' f_2' + 3f_1' f_2'' + f_1 f_2'''$ καὶ ὁμοίως:

$$\boxed{f^{(\nu)} = f_1^{(\nu)} f_2 + \frac{\nu}{1!} f_1^{(\nu-1)} f'_2 + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} f_1^{(\nu-2)} f''_2 + \ldots + f_1 f_2^{(\nu)}} \quad (1)$$

ποὺ εἶναι ὁ τύπος τοῦ Leibniz.

Θὰ δείξωμεν τὴν ἰσχὺν τοῦ τύπου (1).

Ὁ τύπος, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἰσχύει διὰ $\nu = 1,2,3$. Ἐὰν δεχθῶμεν, ὅτι ἰσχύει διὰ νεN καὶ ὅτι αἱ $f_1$, $f_2$ παραγωγίσιμοι εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ μέχρι τάξεως ν, εἶναι παραγωγίσιμοι εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon \Delta$ μέχρι καὶ τάξεως $\nu+1$, θὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ διὰ $\nu+1$. Εἰς τὸν τύπον (1) ἐμφανί-

ζονται αἱ παράγωγοι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ μέχρι τὸ πολὺ τάξεως ν καὶ εἶναι μάλιστα εἰς ἕκαστον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τύπου (1) γινόμενα τούτων, τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι ἕκαστος ὅρος εἶναι συνάρτησις παραγωγισίμων συναρτήσεων εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \mathcal{D}$, ὁπότε καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι συνάρτησις παραγωγίσιμος εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\epsilon\mathcal{D}$, ἤτοι ἡ $f^{(\nu)}$ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς $\xi\epsilon\mathcal{D}$. Κατόπιν τούτου καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουν καὶ αἱ παράγωγοι τάξεως ν+1 εἰς τὴν θέσιν $x = \xi\epsilon\mathcal{D}$ τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ θὰ ἔχωμεν :

$$(f^{(\nu)})' = \left[f_1^{(\nu)}f_2 + \frac{\nu}{1!} f_1^{(\nu-1)}f'_2 + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} f_1^{(\nu-2)}f_2'' + \ldots + f_1f_2^{(\nu)}\right]' =$$

$$= [f_1^{(\nu)}.f_2]' + \frac{\nu}{1!}[f_1^{(\nu-1)}f_2']' + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}[f_1^{(\nu-2)}f_2'']' + \ldots + [f_1f_2^{(\nu)}]' =$$

$$= (f_1^{(\nu+1)}.f_2 + f_1^{(\nu)}f_2') + \frac{\nu}{1!}(f_1^{(\nu)}f_2' + f_1^{(\nu-1)}.f_2'') + \ldots + (f_1'f_2^{(\nu)} + f_1f_2^{(\nu+1)}) =$$

$$= f_1^{(\nu+1)}f_2 + f_1f_2^{(\nu+1)} + \left[\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1}\right] f_1^{(\nu)}f_2' + \left[\binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2}\right] f_1^{(\nu-1)}f_2'' +$$

$$+ \ldots + \left[\binom{\nu}{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\right] f_1'f_2^{(\nu)} = f_1^{(\nu+1)}f_2 + f_1f_2^{(\nu+1)} + \binom{\nu+1}{1} f_1^{(\nu)}f_2' +$$

$$+ \binom{\nu+1}{2} f_1^{(\nu-1)}f_2'' + \binom{\nu+1}{\nu} f_1'f_2^{(\nu)} = f_1^{(\nu+1)}f_2 + \binom{\nu+1}{1} f_1^{(\nu)}f_2' +$$

$$+ \binom{\nu+1}{2} f_2^{(\nu-1)}f_2'' + \ldots + f_1f_2^{(\nu+1)}$$

Ἤτοι ἰσχύει διὰ ν+1.

Συντόμως γράφεται :

$$f^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} f_1^{(\nu-k)}.f_2^{(k)}, \text{ ὅπου } k\epsilon N_0 \text{ καὶ } k \leqq \nu.$$

Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι οἱ συντελεσταὶ ἀκολουθοῦν τὸν νόμον, καθ' ὃν εὑρίσκονται εἰς τὸ διώνυμον $(\alpha+\beta)^\nu$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = x^3e^x$.**

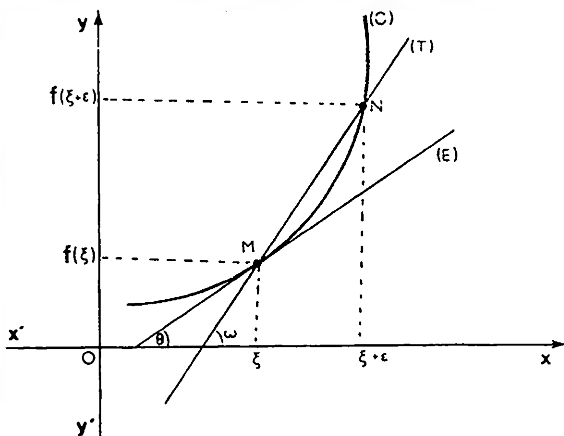
**Ἀπάντησις.** Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ Leibniz μὲ $f_1(x) = x^3$ καὶ $f_2(x) = e^x$.

Θὰ ἔχωμεν : $f^{(6)} = f_1^{(6)}.f_2 + \frac{6}{1!} f_1^{(5)}f'_2 + \frac{6.5}{2!} f_1^{(4)}.f''_2 + \frac{6.5.4}{3!} f_1^{(3)}f_2^{(3)} +$
$+ \frac{6.5.4.3}{4!} f_1''f_2^{(4)} + \frac{6.5.4.3.2}{5!} f_1'f_2^{(5)} + \frac{6.5.4.3.2.1}{6!} f_1f_2^{(6)}$.

Οἱ ὅροι ἀπὸ τοῦ μεσαίου καὶ ἐφεξῆς ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ ἐπειδὴ $f'_1(x) = (x^3)' = 3x^2$, $f_1''(x) = (3x^2)' = 6x$, $f_1'''(x) = (6x)' = 6$, $f^{(4)}(x) = f_1^{(5)}(x) = f_1^{(6)}(x) = 0$ καὶ $f'_2(x) = f_2''(x) = f_2'''(x) = f_2^{(4)}(x) = f_2^{(5)}(x) = f_2^{(6)}(x) = e^x$ θὰ ἔχωμεν τελικῶς : $f^{(6)}(x) = 0.e^x + 6.0.e^x + 15.0.e^x + 20.6.e^x + 15.6x.e^x + 6.3x^2.e^x + 1.x^3.e^x = e^x(120 + 90x + 18x^2 + x^3)$.

## 12. 10 Σημασία γεωμετρική της παραγώγου

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f ὡρισμένην καὶ συνεχῆ εἰς ἕνα διάστημα [α, β] καὶ ἔχουσαν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$ πεπερασμένην.




Ἔστω ἀκόμη, ὅτι (c) εἶναι ἡ καμπύλη ποὺ ἀποτελεῖ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς f εἰς ἕνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων. Ἐὰν $M(\xi, f(\xi))$ καὶ $N(\xi+\varepsilon, f(\xi+\varepsilon)]$ εἶναι δύο διακεκριμένα σημεῖα τῆς (c) $(\varepsilon \neq 0)$, ταῦτα ὁρίζουν τὴν εὐθεῖαν MN, πού, ὡς γνωστόν, καλεῖται τέμνουσα τῆς (c). Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ δύο σημείων $M(x_1, y_1)$ καὶ $N(x_2, y_2)$ εἶναι : $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2} = \dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}$ καὶ ἑπομένως διά :
$x_1 = \xi$, $x_2 = \xi+\varepsilon$, $y_1 = f(\xi)$, $y_2 = f(\xi+\varepsilon)$ θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{x-\xi}{\varepsilon} = \frac{y-f(\xi)}{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)} \Longleftrightarrow y-f(\xi) = (x-\xi)\,\frac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon}.$$

Μεταβάλλοντες $\varepsilon \neq 0$ καὶ μὲ $(\xi+\varepsilon)\epsilon[\alpha, \beta]$, θὰ ἔχωμεν καὶ ὅλας τὰς τέμνουσας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου M τῆς (c).

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ $\varepsilon \to 0$, τότε τὸ σημεῖον $N(\xi+\varepsilon, f(\xi+\varepsilon))$ κινούμενον ἐπὶ τῆς (c) καὶ ἐπειδὴ ἡ f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ [α, β], τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον $M(\xi, f(\xi))$.

Ἐπειδὴ ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $\xi\epsilon(\alpha, \beta)$ καὶ εἶναι πεπερασμένη, θὰ ὑπάρχῃ καὶ τὸ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon} = f'(\xi)\epsilon R$.

Τότε ὅμως ἡ τέμνουσα εἰς τὴν ὁριακὴν αὐτὴν θέσιν $(\varepsilon \to 0)$ θὰ ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν (c) μόνον τὸ M καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης εἰς τὴν ὁριακὴν αὐτὴν θέσιν γίνεται : $y-f(\xi) = (x-\xi)f'(\xi)$. Τὴν ὁριακὴν ταύτην θέσιν τῆς τεμνούσης καλοῦμεν **ἐφαπτομένην** τῆς (c) εἰς τὸ σημεῖον $M(\xi, f(\xi))$.

Ὥστε: Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς (c) εἰς τὸ σημεῖον $(\xi, f(\xi))$ εἶναι:
$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$
ὅπου $f'(\xi)$ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$.

Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ὁ συντελεστὴς διαυθύνσεως τῆς εὐθείας μὲ ἐξίσωσιν $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς (πραγματικὸς) $f'(\xi)$.

Ἑπομένως ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $f'(\xi)$, ποὺ εἶναι ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς (c) εἰς τὸ σημεῖον $M(\xi, f(\xi))$.

Τοῦ λοιποῦ ἀντὶ νὰ λέγωμεν ἡ εὐθεῖα (Ε) ἐφάπτεται τῆς (c) γραφικῆς παραστάσεως τῆς f, εἰς τὸ σημεῖον $(\xi, f(\xi))$, θὰ λέγωμεν χάριν ἁπλότητος, **ὅτι ἐφάπτεται τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον** $\xi \epsilon \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$.

Κατόπιν τούτου ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα εἶναι μία συνάρτησις, ἔστω $f_1$, θὰ ὁμιλοῦμεν γενικῶς **περὶ ἐφαπτομένων συναρτήσεων εἰς τὸ σημεῖον ξ τοῦ κοινοῦ πεδίου ὁρισμοῦ των.**

**Ὁρισμός.** *Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ ὡρισμένας ἐπὶ ἑνὸς συνόλου $\Delta \subseteq \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$ καὶ ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ. Θὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ ἐφάπτωνται εἰς τὸ σημεῖον $\xi \epsilon \Delta$ ὅταν:*
$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{x - \xi} = 0 \text{ μὲ } x \neq \xi.$$

Οὕτω ἡ συνάρτησις $f_1$ μὲ τύπον $y = f_1(x)$ καὶ ἡ συνάρτησις (ἡ εὐθεῖα) $f_2$ μὲ τύπον $y = f_1(\xi) + f_1'(\xi)(x - \xi) = f_2(x)$ ἐφάπτεται εἰς τὸ σημεῖον $\xi \epsilon \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$, διότι:
$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_1(\xi) - f_1'(\xi)(x - \xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi} -$$
$$- f_1'(\xi) = f_1'(\xi) - f_1'(\xi) = 0$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3$ εἶναι ὡρισμέναι ἐπὶ ἑνὸς διαστήματος $\Delta \subseteq \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2) \cap \mathscr{D}(f_3)$ καὶ ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ καὶ αἱ $f_1, f_2$ ἐφάπτωνται εἰς τὸ $\xi \epsilon \mathscr{D}$ καθὼς καὶ αἱ $f_2, f_3$, τότε θὰ ἐφάπτωνται εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$ καὶ αἱ $f_1, f_3$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἀφοῦ αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ ἐφάπτονται εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$ θὰ εἶναι:
$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{x - \xi} = 0 \quad (x \neq \xi)$$
καὶ ἐπίσης ἀφοῦ καὶ $f_2, f_3$ ἐφάπτονται εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$ θὰ εἶναι:
$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_2(x) - f_3(x)}{x - \xi} = 0 \quad (x \neq \xi).$$

Ἀλλὰ $\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{x - \xi} + \lim_{x \to \xi} \frac{f_2(x) - f_3(x)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_2(x) + f_2(x) - f_3(x)}{x - \xi}$

$= \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f_1(x) - f_3(x)}{x - \xi} = 0$ καὶ ἑπομένως καὶ αἱ $f_1$ καὶ $f_3$ ἐφάπτονται εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f_1$ εἶναι ὡρισμένη ἐπὶ ἑνὸς συνόλου $\Delta \subseteq \mathcal{D}(f)$ καὶ $\xi$ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ $\Delta$, τότε ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα τῆς μορφῆς $f_2(x) = c_1 + c_2(x - \xi)$ ($c_1, c_2 \epsilon R$) ἐφαπτομένη τῆς $f_1$ εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$.**

**Ἀπόδειξις.** Εἴδωμεν προηγουμένως ὅτι ἡ εὐθεῖα $f_2(x) = f_1(\xi) + f'_1(\xi) \cdot (x - \xi)$ ἐφάπτεται τῆς $f_1$ εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι ἡ $f_1$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$.

Εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι ἐὰν ἡ $f_1$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$, τότε ἡ $f_2$ λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$f_2(x) = f_1(\xi) + c_2(x - \xi).$$

Πράγματι ἐὰν δεχθῶμεν, ὅτι ἡ $f_2$ ἐφάπτεται τῆς $f_1$ εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$ θὰ πρέπει:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{x - \xi} = 0 \quad (x \neq \xi)$$

Ἔχομεν:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - c_1 - c_2(x - \xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - c_1}{x - \xi} - c_2$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ ὅριον τοῦτο μηδέν, θὰ πρέπει $\lim\limits_{x \to \xi} f_1(x) = c_1$, ἐπειδὴ ὅμως ἡ $f_1$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$, θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x \to \xi} f_1(x) = f_1(\xi),$$

ἑπομένως $c_1 = f_1(\xi)$ καὶ ἡ $f_2$ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$f_2(x) = f_1(\xi) + c_2(x - \xi).$$

Ἐὰν τώρα ὑπάρχῃ ἐφαπτομένη (εὐθεῖα) εἰς $f_1$ εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$, τότε αὐτὴ εἶναι μοναδική.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τῆς $f_1$ ἐφάπτεται ἡ $f_2$ μὲ $f_2(x) = c_1 + c_2(x - \xi)$, καθὼς καὶ ἡ $f_3$ μὲ $f_3(x) = c_3 + c_4(x - \xi)$ ἀμφότεραι εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$.

Τότε συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν θὰ ἐφάπτωνται εἰς τὸ $\xi \epsilon \Delta$ καὶ $f_2, f_3$ καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_2(x) - f_3(x)}{x - \xi} = 0 \quad (x \neq \xi)$$

Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{c_1 + c_2(x - \xi) - c_3 - c_4(x - \xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{c_1 - c_3}{x - \xi} + c_2 - c_4 = 0$$

τὸ ὁποῖον συμβαίνει μόνον ὅταν $c_1 = c_3$ καὶ $c_2 = c_4$ καὶ ἐπομένως ἡ $f_2$ εἶναι μηδενική.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ συνάρτησις $f_2(x) = f_1(\xi)+c_2(x-\xi)$ ἐφάπτεται τῆς συναρτήσεως $f_1$, ὡρισμένης ἐπὶ ἑνὸς συνόλου $\mathscr{D}$, εἰς τὸ σημεῖον $\xi\in\mathscr{D}$, εἶναι ἡ $f_1$ νὰ ἔχῃ παράγωγον πεπερασμένην εἰς τὴν θέσιν $\xi\in\mathscr{D}$. Εἶναι δὲ τότε $c_2 = f'_1(\xi)$ καὶ ἡ $f_2$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $f_2(x) = f_1(\xi)+f'_1(\xi)(x-\xi)$.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = 3x^2$.**

**α) Εὕρετε εἰς ποῖον σημεῖον τοῦ διαγράμματος τῆς f ἡ ἐφαπτομένη ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda = 1$.**

**β) Εἰς ποῖον σημεῖον εἶναι ἡ ἐφαπτομένη παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x.**

**γ) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x ὑπὸ γωνίαν $30^0$.**

**δ) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y = 3x$.**

**ε) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος τῆς εὐθείας $3x - 2y+1 = 0$.**

**στ) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς.**

**ζ) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου M(1, 1).**

**η) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὴν εὐθεῖαν $2x - 3y+2 = 0$ ὑπὸ γωνίαν $45^0$.**

**θ) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον $M_1(0, -2)$.**

**Ἀπάντησις.** α) Γνωρίζομεν, ὅτι συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $(\xi, f(\xi))$ εἶναι $\lambda=f'(\xi)$. Ἔχομεν $f'(x)=6x$ καὶ εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathscr{D}(f)=R$, θὰ εἶναι: $f'(\xi) = 6\xi$. Ὥστε $6\xi = \lambda = 1$, ἄρα $\xi = \frac{1}{6}$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν σημεῖον θὰ εἶναι: $(\xi, f(\xi)) = \left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$.

β) Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ σημεῖον $\xi\in R$ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x εἶναι ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον $f'(\xi) = 0$.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν: $f'(\xi) = 0 \Rightarrow 6\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$ καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τό: $(0, f(0)) = (0, 0)$, δηλαδὴ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων.

γ) Γνωρίζομεν, ὅτι ἂν ἡ ἐφαπτομένη τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν x ὑπὸ γωνίαν ω, τότε ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης θὰ εἶναι $\lambda = \text{εφ}\omega$. Εἰς τὴν περίπτωσιν μας θὰ ἔχωμεν $\lambda = \text{εφ}30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ἀλλὰ $\lambda=f'(\xi)$, ὅπου $\xi\in R$ τὸ σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως λ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν: $f'(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6\xi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι συνεπῶς τὸ $(\xi, f(\xi)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{18}, \frac{1}{36}\right)$.

δ) Ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, θὰ πρέπει νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν διευθύνσεως. Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς $y = 3x$ εἶναι $\lambda_1 = 3$, ὁ δὲ τῆς ἐφαπτομένης $\lambda = f'(\xi)$. Ὥστε θὰ πρέπει: $f'(\xi) = 3 \Rightarrow 6\xi = 3 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}$.

Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι: $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

ε) Ἡ εὐθεία $3x - 2y + 1 = 0$ ἔχει, ὡς γνωστόν, συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ καὶ ἂν λ ὁ ἀντίστοιχος τῆς ἐφαπτομένης ἀφοῦ θὰ εἶναι κάθετοι θὰ πρέπει: $\lambda_1 . \lambda = -1$ καὶ ἐπομένως $\lambda = -\frac{2}{3}$. Κατόπιν τούτου ἐπειδὴ $\lambda = f'(\xi)$, θὰ ἔχωμεν $6\xi = -\frac{2}{3} \Rightarrow \xi = -\frac{1}{9}$.

Ἐπομένως τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι: $\left(-\frac{1}{9}, f\left(-\frac{1}{9}\right)\right) = \left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{27}\right)$.

στ) Ἵνα ἡ ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς θὰ πρέπει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης ποὺ εἶναι $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$, νὰ ἐπαληθεύεται μὲ τὰς συντεταγμένας τῆς ἀρχῆς $(0, 0)$. Ἔχομεν: $0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Rightarrow -3\xi^2 = -\xi . 6\xi \Rightarrow \xi = 0$ καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ $(0, f(0)) = (0, 0) \Rightarrow f'(\xi) = 0$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ἐπομένως εἶναι ὁ ἄξων τῶν x.

ζ) Ἵνα ἡ ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $M(1, 1)$ θὰ πρέπει αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου νὰ πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$.

Ἔχομεν: $1 - f(\xi) = f'(\xi)(1 - \xi) \Rightarrow 1 - 3\xi^2 = 6\xi(1 - \xi)$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν: $\xi_1 = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ καὶ $\xi_2 = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$.

Ὑπάρχουν συνεπῶς δύο ἐφαπτόμεναι τῆς f, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ $M(1, 1)$. Εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα $M_1\left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}, f\left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\right)$ καὶ $M_2\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}, f\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)\right)$.

η) Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς εὐθείας $2x - 3y + 2 = 0$ εἶναι: $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, ὁ δὲ τῆς ἐφαπτομένης $\lambda = f'(\xi) = 6\xi$. Ἐὰν ω ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὴν εὐθείαν, θὰ ἔχωμεν: $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 45^0 = 1$. Καὶ πρέπει νὰ ἰσχύῃ:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{|\lambda - \lambda_1|}{|1 + \lambda\lambda_1|}.$$

Ἐπομένως: $\left|\frac{6\xi - \frac{2}{3}}{1 + 6\xi\frac{2}{3}}\right| = 1 \Rightarrow \left|6\xi - \frac{2}{3}\right| = |1 + 4\xi|$. Ἔχομεν συνεπῶς:

$6\xi - \frac{2}{3} = 1 + 4\xi \Rightarrow \xi = \frac{5}{6}$ καὶ $6\xi - \frac{2}{3} = -4\xi - 1 \Rightarrow \xi = -\frac{1}{30}$. Ὑπάρχουν συνεπῶς δύο σημεῖα τὰ $M_1\left(\frac{5}{6}, f\left(\frac{5}{6}\right)\right)$ καὶ $M_2\left(-\frac{1}{30}, f\left(-\frac{1}{30}\right)\right)$.

θ) Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὸ (ζ).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \alpha^x (\alpha > 0)$. Εὕρετε διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ὑπάρχει ἐφαπτομένη τῆς f παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην διχοτόμον τῶν ἀξόνων ἢ καὶ νὰ συμπίπτῃ πρὸς αὐτήν.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $(\xi, f(\xi))$ τῆς f εἶναι: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Ἀλλὰ $f(\xi) = \alpha^\xi$ καὶ $f'(\xi) = \alpha^\xi \log\alpha$ καὶ ἑπομένως ἵνα ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην διχοτόμον τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶναι $y = x$ μὲ συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda_1 = 1$, θὰ πρέπει $f'(\xi) = 1 \Rightarrow \alpha^\xi \log\alpha = 1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ζεύγη τιμῶν τῶν $\alpha, \xi$ διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἐφαπτομένη τῆς f εἶναι παράλληλος τῆς $y = x$. Ἐὰν $\xi = 0$, τότε $\log\alpha = 1$, ἄρα $\alpha = e$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον $(0, f(0))$ τῆς $f(x) = e^x$, δηλαδὴ εἰς τὸ σημεῖον $(0, 1)$ τῆς $f(x) = e^x$ εἶναι παράλληλος τῆς $y = x$.

Διὰ νὰ συμπίπτῃ ἡ ἐφαπτομένη τῆς $f(x) = \alpha^x$, μὲ τὴν $y = x$, θὰ πρέπει ἡ ἐξίσωσις $y = \alpha^\xi = \alpha^\xi(\log\alpha)(x - \xi)$ νὰ ταυτίζεται μὲ τὴν $y = x$.

Θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha^\xi \log\alpha = 1 \\ \alpha^\xi - \xi\alpha^\xi \log\alpha = 0 \text{ μὲ } \alpha^\xi \neq 0 \text{ καὶ } \alpha > 0 \end{cases}$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν: $\xi\log\alpha + \log(\log\alpha) = 0$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\xi\log\alpha = 1$. Τελικῶς εὑρίσκομεν: $\log(\log\alpha) = -1 \Rightarrow \log\alpha = e^{-1} \Rightarrow \alpha = e^{e^{-1}}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = R^2$, τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τῆς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ καὶ τῆς παραβολῆς $y^2 = 2px$ εἰς τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$.**

**Ἀπάντησις. α)** Ἐκ τῆς $x^2+y^2 = R^2 \Rightarrow 2x+2yy' = 0$ καὶ ἑπομένως $y' = -\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$. Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$ θὰ εἶναι συνεπῶς: $\lambda = -\frac{x_1}{y_1}$.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $(\xi, f(\xi))$ εἶναι:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi).$$

Εἰς τὴν περίπτωσίν μας θὰ ἔχωμεν: $f(x_1) = y_1$ καὶ $f'(\xi) = \lambda = -\frac{x_1}{y_1}$ καὶ ἑπομένως:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2 \Rightarrow xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = R^2.$$

Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = R^2$ εἰς τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$ αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$xx_1 + yy_1 = R^2.$$

β) Ἐκ τῆς $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\beta^2} = 1 - \frac{x^2}{\alpha^2} \Rightarrow 2yy' = \beta^2\left(-\frac{2x}{\alpha^2}\right) \Rightarrow y' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ καὶ συνεπῶς ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$ θὰ εἶναι: $\lambda = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{x_1}{y_1}$.

Κατόπιν τούτου ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης ὡς καὶ προηγουμένως εἶναι:

$$y - y_1 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\,\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$yy_1\alpha^2 - \alpha^2 y_1^2 = -\beta^2 xx_1 + \beta^2 x_1^2 \Rightarrow \beta^2 xx_1 + \alpha^2 yy_1 = \beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 \Rightarrow \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} =$$

$$= \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ εἰς τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$ αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

γ) Διὰ τὴν ὑπερβολὴν $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Εὑρίσκομεν, ὁμοίως ὡς ἄνω, ὅτι ὁ τύπος τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$ αὐτῆς εἶναι:

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

δ) Διὰ τὴν παραβολὴν $y^2 = 2px$ εὑρίσκομεν: $yy_1 = p(x+x_1)$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ἔστω σημεῖον $M(x_0, y_0)$ τοῦ διαγράμματος τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = x^\nu$, ὅπου $\nu \in Q$. Ὑποθέτομεν $x_0 > 0$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς f εἰς τὸ M. Ἐὰν μ ἡ προβολὴ τοῦ M ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y καὶ T ἡ τομὴ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M μὲ τὸν ἄξονα τῶν y, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{\vec{OT}}{\vec{O\mu}} = 1 - \nu$ (O ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων). Νὰ ὑπολογισθῇ ἀκολούθως ὁ ν, ἵνα τὸ O εἶναι τὸ μέσον τοῦ μT.**

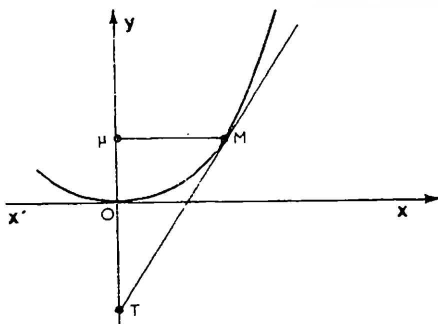
**Ἀπάντησις.** Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M(x_0, y_0)$ εἶναι $f'(x_0)$. Ἔχομεν: $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$ καὶ ἑπομένως $f'(x_0) = \nu x_0^{\nu-1}$.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἶναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

καὶ συνεπῶς: $y - y_0 = \nu x_0^{\nu-1}(x - x_0) \Rightarrow y = \nu x_0^{\nu-1}x - \nu x_0^\nu + y_0$

καὶ ἐπειδὴ $x_0^\nu = y_0$, θὰ ἔχωμεν τελικῶς:

$$y = \nu x_0^{\nu-1}x + (1 - \nu)y_0 \qquad (1)$$



Ἐκ τῆς (1) διὰ $x = 0$ θὰ λάβωμεν τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου Τ. Εὑρίσκομεν:

$$y_\tau = (1-\nu)y_0 \Rightarrow \frac{y_\tau}{y_0} = 1-\nu \text{ καὶ ἑπομένως } \frac{\overrightarrow{OT}}{\overrightarrow{O\mu}} = 1-\nu.$$

Ἵνα τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ μΤ, θὰ πρέπει:

$$\frac{\overrightarrow{OT}}{\overrightarrow{O\mu}} = -1 \text{ καὶ συνεπῶς } 1-\nu = -1 \Longleftrightarrow \nu = 2.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι μόνον διὰ τὴν παραβολὴν $y = f(x) = x^2$ τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ μΤ.

## 12. 11 Κινηματικὴ ἑρμηνεία τῆς παραγώγου

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x κατά τινα φοράν. Εἶναι φανερόν, ὅτι σὲ κάθε χρονικὴν στιγμὴν t μὲ $t = [t_1, t_2]$, ὅπου $t = t_1$ ἡ χρονικὴ στιγμὴ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως καὶ $t = t_2$ ἡ χρονικὴ στιγμὴ κατὰ τὸ τέλος τῆς κινήσεως, ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ Μ εἶναι ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Ἐὰν x ἡ τετμημένη τοῦ Μ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t, τότε θὰ ἔχωμεν: $x = f(t)$, δηλαδὴ ἡ τετμημένη τοῦ Μ παρουσιάζεται ὡς συνάρτησις τοῦ χρόνου t, κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ t ἀπὸ $t_1$ εἰς $t_2$.

Ἔχομεν συνεπῶς μίαν συνάρτησιν τοῦ τύπου $x=f(t)$ μὲ $\mathcal{D}(f) = [t_1, t_2]$.

Ἔστω τώρα $t_0 \in (t_1, t_2)$ μία χρονικὴ στιγμή. Τότε τὸ πηλίκον διαφορῶν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_0$ θὰ εἶναι: $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, πού, ὡς γνωστόν, ὁρίζεται ὡς ἡ μέση ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸν χρόνον $t - t_0$.

Ἐὰν τώρα ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ καὶ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, τοῦτο ὁρίζεται ὡς ἡ **στιγμιαία ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t.**

Ἐπειδὴ ὅμως $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἡ πρώτη παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $t = t_0$, θὰ ἔχωμεν:

$$U(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0)$$

Ἐὰν τώρα ὑπάρχῃ ἡ πρώτη παράγωγος τῆς f $\forall t \in (t_1, t_2)$ ,τότε ὁρίζεται μία νέα συνάρτησις υ μὲ τύπον $\upsilon = f'(t)$ $\forall t \in (t_1, t_2)$, ποὺ εἶναι ἡ στιγμιαία ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν $t \in (t_1, t_2)$.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι καὶ διὰ τὴν νέαν συνάρτησιν $\upsilon = f'(t)$, ποὺ χάριν ἁπλότητος ἄς τὴν συμβολίσωμεν μὲ $\eta = \upsilon(t)$, ὑπάρχει τό:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\upsilon(t)-\upsilon(t_0)}{t-t_0}$$

καὶ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἔστω $\upsilon'(t_0)$. Τὸν πραγματικὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς $\eta = \upsilon(t)$ εἰς τὴν θέσιν $t_0 \epsilon (t_1, t_2)$ καλοῦμεν στιγμιαίαν ἐπιτάχυνσιν τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_0$ καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ $\gamma(t_0)$.

Εἶναι ὅμως τὸ $\upsilon'(t_0)$ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $t_0 \epsilon (t_1, t_2)$.

Ὥστε: $\gamma(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\upsilon(t) - \upsilon(t_0)}{t - t_0} = \upsilon'_0(t) = f''(t_0)$.

Ἐὰν συνεπῶς ὑπάρχῃ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς f $\forall t \epsilon (t_1, t_2)$ αὕτη ἐκφράζει τὴν στιγμιαίαν ἐπιτάχυνσιν τοῦ κινητοῦ διὰ κάθε χρονικὴν στιγμὴν $t \epsilon (t_1, t_2)$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἂν $S = f(t) = 4t^3 + 3t^2 + t + 1$ εἶναι ἡ συνάρτησις τοῦ διαστήματος, δηλαδὴ ὁ τύπος τοῦ διαστήματος συναρτήσει τοῦ χρόνου, δι' ἓν κινητὸν M, τότε ἡ ταχύτης αὐτοῦ κατὰ τινα χρονικὴν στιγμὴν t, θὰ εἶναι: $\upsilon(t) = f'(t) = 12t^2 + 6t + 1$ καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ $\gamma(t) = f''(t) = 24t + 6$.

## 12. 12 Διαφορικὸν συναρτήσεως

Θεωροῦμεν μίαν συνάρτησιν f μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathfrak{D}(f)$ καὶ ἔχουσαν παράγωγον εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi \epsilon \mathfrak{D}(f)$, πεπερασμένην.

**Ὁρισμὸς 1.** *Καλοῦμεν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi \epsilon \mathfrak{D}(f)$ τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν μὲ τύπον $Y = f'(\xi).X$, τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ $df(\xi) : R \mapsto R$.*

Ἔστω τώρα καὶ ἡ συνάρτησις σ μὲ $\sigma(x) = x$, τῆς ὁποίας τὸ $\mathfrak{D}(\sigma) = R$. Διὰ τὴν συνάρτησιν αὐτὴν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ παράγωγος αὐτῆς $\forall x \epsilon R$ εἶναι $\sigma'(x) = 1$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τὸ διαφορικὸν αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ συνάρτησις μὲ τύπον $Y = 1.X = X$, τῆς ὁποίας τὸ σύμβολον θὰ εἶναι: $d\sigma(x) = dx : R \mapsto R$.

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν καὶ τὴν συνάρτησιν $f'(\xi)dx : R \mapsto R$ ὁ τύπος τῆς $Y = f'(\xi)X$ εἶναι ὁ τύπος τῆς $df(\xi) : R \mapsto R$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν, ὅτι:

$$df(\xi) = f'(\xi)dx.$$

Ὅταν λοιπὸν ἡ f εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τὸ σημεῖο $\xi \epsilon \mathfrak{D}(f)$ ὁρίζεται καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς εἰς τὸ $\xi \epsilon \mathfrak{D}(f)$, ποὺ σημαίνει **ὅτι ὁρίζεται μία συνάρτησις** μὲ τύπον:

$$\mathfrak{D}(f) \ni x \to df(x)$$

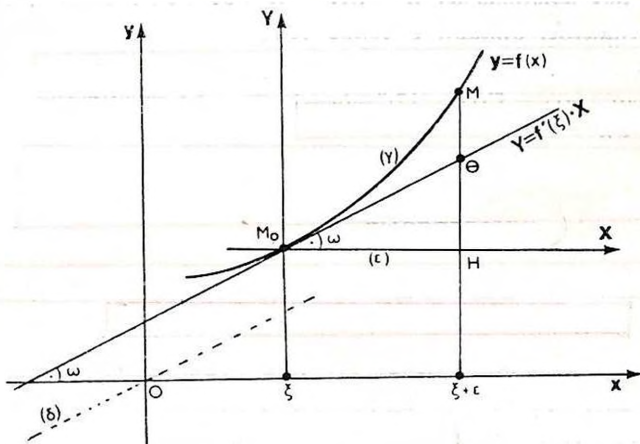
διὰ τῆς ὁποίας εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον $x \epsilon \mathfrak{D}(f)$ ἀντιστοιχεῖ καὶ μία συνάρτη-

σις τὸ διαφορικὸν τῆς f εἰς τὸ $x \in \mathscr{D}(f)$. Αὐτὴν τὴν συνάρτησιν συμβολίζομεν μὲ dx καὶ τὴν καλοῦμεν διαφορικὸν τῆς f, ἤτοι:

$$\mathscr{D}(f) \ni x \xrightarrow{dx} df(x)$$

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ διαφορικοῦ δίδεται ἀπὸ τὸ κατωτέρω σχῆμα.

Ἐὰν (γ) τὸ διάγραμμα τῆς f ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον $M_0(\xi, f(\xi))$, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς αὐτὸ εἶναι $Y = f'(\xi)X$ καὶ ἐκφράζει τὴν συνάρτησιν ποὺ εἶναι τὸ διαφορικὸν τῆς f εἰς τὸ $\xi \in \mathscr{D}(f)$. Ἔχομεν εὐκόλως, ὅτι: $(H\Theta) = f'(\xi).\varepsilon =$ μὲ τὴν τιμὴν τοῦ $df(\xi)$.




**Παρατηρήσεις**

**1)** Προσέξατε, ὅτι μεταξὺ τῆς παραγώγου τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi \in \mathscr{D}(f)$ καὶ τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathscr{D}(f)$ ὑπάρχει **οὐσιώδης διαφορά**, διότι ἡ μὲν παράγωγος $f'(\xi)$ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἐνῷ τὸ διαφορικὸν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι μία συνάρτησις (ἢ ἀντίστοιχος) καὶ ἑπομένως τὸ $df(\xi)$ δὲν εἶναι μία σταθερά.

**2)** Ἡ εὐθεῖα $y = f'(\xi)x$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi \in \mathscr{D}(f)$.

**3)** Ἀπὸ τὸ σχῆμα παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ αὐξηθῇ ἀπὸ τῆς τιμῆς ξ εἰς τὴν $(\xi+\varepsilon) \in \mathscr{D}(f)$ $(\varepsilon \neq 0)$, τότε θὰ ἔχωμεν μίαν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς συναρτήσεως f, ἡ ὁποία θὰ εἶναι: $f(\xi+\varepsilon) - f(\xi) = \Delta f(\xi)$ (τὸ $\Delta f(\xi)$ ἐκφράζει συμβολικῶς αὐτὴν τὴν μεταβολὴν) καὶ ἔχομεν: $\Delta f(\xi) = (\overrightarrow{H\Theta}) + (\overrightarrow{\Theta M}) = f'(\xi).\varepsilon + (\overrightarrow{\Theta M})$. Ἀλλὰ ἂν τὸ ε ληφθῇ πο-

λὺ μικρό, τότε τὸ $(\overrightarrow{\Theta M})$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀμελητέον ἐνώπιον τοῦ $f'(\xi).\varepsilon$ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν τὸ $\mathcal{D}f(\xi) = f'(\xi).\varepsilon$, ποὺ σημαίνει, ὅτι διὰ μίαν περιοχὴν τοῦ $\xi$ τὴν $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ (μὲ $\varepsilon > 0$) δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν καμπύλην διὰ τῆς ἐφαπτομένης της εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

4) Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ $dx$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ $x$, ἀφοῦ $dx = 1.\varepsilon$.

5) Ἐπειδὴ $df(x) = f'(x)dx$, θὰ ἔχωμεν: $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$ καὶ οὕτω καταφαίνεται διατὶ καὶ ὁ συμβολισμὸς τῆς παραγώγου μὲ τὸν ὡς ἄνω τρόπον.

6) Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι παραγωγίσιμοι εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1, f_2)$, τότε προφανῶς θὰ ἰσχύουν:

1. $d(c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1df_1(x) + c_2df_2(x)$, ($c_1$, $c_2$ σταθεραὶ ἐν R)
2. $d[f_1(x).f_2(x)] = f_1(x)df_2(x) + f_2(x)df_1(x)$
3. $d\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \dfrac{f_2(x)df_1(x) - f_1(x)df_2(x)}{[f_2(x)]^2}$ (ὑποτίθεται $f_2(x) \neq 0$).
4. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f_2$ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τὸ $x$ καὶ ἡ συνάρτησις $f_1$ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τὸ $f_2(x)$ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ $\mathcal{D}(f_1)$, τότε θὰ ἔχωμεν: $d[f_1(f_2(x))] = f_1'[f_2(x)]df_2(x) = f_1'[f_2(x)]f_2'(x)dx$.
5. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f$ μὲ τύπον $y = f(x)$ εἶναι **γνησίως μονότονος καὶ συνεχὴς εἰς ἕνα διάστημα** $\Delta$ καὶ ἔχει παράγωγον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον $\xi$ τοῦ $\Delta$ οὕτως ὥστε $f'(\xi) \neq 0$, τότε θὰ ἰσχύῃ:

$$dy = f'(\xi)dx \quad \text{καὶ} \quad dx = \frac{1}{f'(\xi)}\,dy$$

**Ἀπόδειξις.** Ὑπάρχει, ὡς γνωστόν, ἡ ἀντίστροφος τῆς $f$ καὶ εἶναι $x = f^{-1}(y)$ καὶ ἔχει παράγωγον εἰς τὸ $f(\xi)$, τότε ὅμως θὰ ἰσχύῃ:

$$dx = (f^{-1})'(f(\xi))dy = \frac{1}{f'(\xi)}\,dy.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα διαφορικά:**

**1)** $d(3x^3 + 4x^2 - 1)$ **2)** $d\eta\mu x$ **3)** $d\log x$ **4)** $d\log(x^2 + 1)$

**Ἀπάντησις.** 1) $d(3x^3 + 4x^2 - 1) = d(3x^3) + d(4x^2) - d1 = 9x^2dx + 8xdx = (9x^2 + 8x)dx$

2) $d\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x dx$

3) $d\log x = \dfrac{dx}{x}$

4) $d\log(x^2 + 2) = \dfrac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} = \dfrac{2xdx}{1 + x^2}$.

## 12. 13 Ὑπερβολικαὶ συναρτήσεις

**Ὁρισμός.** *Καλοῦμεν ὑπερβολικὰς συναρτήσεις (ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης) τὰς συναρτήσεις τὰς ὁριζομένας ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ἀκολούθων τύπων (καὶ συμβόλων):*

$$f_1(x) = sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall x \epsilon R$$

$$f_2(x) = coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \epsilon R$$

$$f_3(x) = Tgh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \epsilon R$$

$$f_4(x) = ctghx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \epsilon R - \{0\}$$

sinhx → ημx
cos x → συνx
tahx ∴ tgx → εφx
ctahx ∴ ctgx → σφx

Διὰ τὰς συναρτήσεις αὐτὰς ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

**A. 1.** $\cosh^2x - \text{cinh}^2x = 1$

**2.** $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

**3.** $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

**4.** $(\cosh x + \sinh x)^\nu = \cosh(\nu x) + \sinh(\nu x) = e^{\nu x} \mid \nu = 0,1,2,\ldots$

**5.** $\cosh 2x = \sinh^2x + \cosh^2x$

**6.** $\sinh 2x = 2\sinh x \ \text{coshc}x$

**Ἀποδείξεις.** 1) Ἔχομεν $\cosh^2x - \sinh^2x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2e^x.e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x}+2e^x.e^{-x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

2. $\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot$

$$\cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y).$$

3. Ὁμοίως.

4. Διὰ $\nu = 0$ καὶ $\nu = 1$ προφανής.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = k$, τότε:

$\cosh kx + \sinh kx = (\cosh x + \sinh x)^k$ καὶ $(\cosh kx + \sinh kx)(\cosh x + \sinh x) =$

$$= \left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} + \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = e^{kx}.e^x = e^{(k+1)x} =$$

$$= \frac{e^{(k+1)x} + e^{-(k+1)x}}{2} + \frac{e^{(k+1)x} - e^{-(k+1)x}}{2} = \cosh(k+1)x + \sinh(k+1)x =$$

$(\cosh x + \sinh x)^{k+1}$.

6. $\cosh(2x) = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$

7. Ὁμοίως.

**B.** Αἱ ὑπερβολικαὶ συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς ἑκάστη εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της.

Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἀφοῦ ἡ συνάρτησις $f(x) = e^x$ εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$.

**α)** Ἡ συνάρτησις $f_1(x) = \sinh x$ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ R καὶ ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα (εὐκόλως ἀποδεικνυόμενα).

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty \text{ καὶ } \lim_{x \to 0} \sinh x = 0$$

**β)** Ἡ συνάρτησις $f_2(x) = \cosh x$ εἶναι γνησίως φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, 0]$ καὶ γνησίως αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $[0, +\infty)$ καὶ ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} \cosh x = 1$$

**γ)** Ἡ συνάρτησις $f_3(x) = \operatorname{tgh} x$ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ R καὶ ἰσχύουν:

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tgh} x = 1 \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{tgh} x = -1$$

**δ)** Ἡ συνάρτησις $f_4(x) = \operatorname{ctgh} x$ εἶναι γνησίως φθίνουσα εἰς τὰ διαστήματα $(-\infty, 0)$ καὶ $(0, +\infty)$ καὶ ἰσχύουν:

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{chg} x = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{ctgh} x = -1, \quad \lim_{x \to 0+0} \operatorname{ctgh} x = +\infty \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{ctgh} x = -\infty$$

**Γ.** Τὰς παραγώγους τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων εὑρίσκομεν εὐκοκολώτατα καὶ εἶναι αὐταί:

α) $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \ \forall x \in R$

β) $(\cosh x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \ \forall x \in R$

γ) $(\operatorname{tgh} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{singh} x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{(\cosh x)^2} = \dfrac{1}{(\cosh x)^2} \ \forall x \in R$

δ) $(\operatorname{ctgh} x)' = \left(\dfrac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = -\dfrac{1}{(\sinh x)^2}, \ \forall x \in R - \{0\}$

**Δ. Ἀντίστροφοι τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων.**

**α)** Τῆς $f_1(x) = \sinh x$. Ἐπειδὴ ἡ $f_1$ εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$ καὶ γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ R μὲ $R(f_1) = R$ θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς ἡ ὁποία θὰ εἶναι συνεχὴς καὶ γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ R ἔχουσα πεδίον ὁρισμοῦ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ R.

Ταύτην συμβολίζομεν, ὡς καὶ διὰ τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις χάριν ἁπλότητος μέ: $\operatorname{Arsinh} x = y$.

Ὁ τύπος τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως τῆς $f_1$ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Ἔχομεν: $f_1(x) = y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ καὶ ἐπιλύομεν ὡς πρὸς $e^x$. Λαμβάνομεν:

$(e^x)^2 - 2e^x . y - 1 = 0$ καὶ ἐπομένως: $e^x = y + \sqrt{y^2+1} > 0$ (ἀφοῦ $e^x > 0 \ \forall x \in R$).

Ὥστε $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$.

Δι' ἐναλλαγῆς δὲ τῶν μεταβλητῶν λαμβάνομεν τελικῶς τὸν τύπον τῆς ἀντιστρόφου:

$$y = \operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \forall x \in R$$

Ἡ παραγώγισις αὐτῆς εἶναι:

$$(\operatorname{Arsinh} x)' = [\log(x + \sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} (x + \sqrt{x^2+1})' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in R.$$

**β)** Τῆς $f_2(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$.

Ἐπειδὴ ἡ $f_2$ εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$ καὶ γνησίως φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, 0)$ ἐνῷ εἶναι γνησίως αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $(0, +\infty)$ ἕπεται ὅτι θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων αὐτῶν μὲ τὸ αὐτὸ εἶδος μονοτονίας.

Τὴν ἀντίστροφον τῆς $f_2$ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

Ἔχομεν: $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$. Ἐπιλύομεν ὡς πρὸς $e^x$ καὶ λαμβάνομεν:

$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ καὶ ἐπειδὴ $y \geq 1$, θὰ εἶναι $e^x \geq 0$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $x \geq 0$ εἶναι $e^x \geq 1$, ἐνῷ διὰ $x \leq 0$ εἶναι $0 < e^x \leq 1$.

Ἐπειδὴ $y + \sqrt{y^2+1} \geq 1$ καὶ $0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$ θὰ ἔχωμεν: $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ διὰ $x \geq 0$ καὶ $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ διὰ $x \leq 0$.

Ὁπότε $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ διὰ $x \geq 0$ καὶ $x = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})$ διὰ $x \leq 0$.

Δι' ἐναλλαγῆς δὲ τῶν μεταβλητῶν:

$$y = \operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ μὲ } x \geq 1$$

ὡς ἀντίστροφον τῆς $y = \cosh x$ ἂν $x \geqq 0$ καὶ $y = \text{Arcosh} = \log(x - \sqrt{x^2-1})$ μὲ $x \geqq 1$ ὡς ἀντίστροφον τῆς $y = \cosh x$ ἂν $x \leqq 0$.

Ὡς παράγωγον τῆς πρώτης εὑρίσκομεν:

$$(\text{Arcosh}x)' = \left[\log(x + \sqrt{x^2-1})\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \epsilon R : x > 1$$

καὶ τῆς δευτέρας:

$$(\text{Arcosh}x)' = \left[\log(x - \sqrt{x^2-1})\right]' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \epsilon R : x > 1$$

**γ)** Τῆς $f_3(x) = \text{tgh}x$. Ἐπειδὴ ἡ $f_3$ εἶναι συνεχὴς καὶ γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ R μὲ $R(f_3) = (-1, 1)$ ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς καὶ εἶναι ἐπίσης συνεχὴς καὶ γνησίως αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $(-1, 1)$. Ἡ ἀντίστροφος τῆς $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἐπιλύομεν ὡς πρὸς $e^x$ καὶ εὑρίσκομεν: $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ καὶ ἐπειδὴ $-1 < y < 1$ εἶναι:

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} > 0, \text{ ὁπότε } x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

Καὶ δι' ἐναλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν ἔχομεν ὡς ἀντίστροφον τῆς $f_3(x) = \text{tgh}x \ \forall x \epsilon R$ τήν:

$$\text{Artgh}x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad \forall x \epsilon R : -1 < x < 1.$$

Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι:

$$(\text{Artgh}x)' = \frac{1}{1-x^2} > 0 \quad \forall x \epsilon R : -1 < x < 1.$$

**δ)** Τῆς $f_4(x) = \text{ctgh}x$. Ἐπειδὴ ἡ $f_4$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὰ διαστήματα $(-\infty, 0)$ καὶ $(0, +\infty)$ καὶ γνησίως φθίνουσα εἰς αὐτὰ μὲ $R(f_4) = (-\infty, -1)$, ἀντιστοίχως $R(f_4) = (1, +\infty)$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος τῆς $f_4$ εἶναι συνεχὴς καὶ γνησίως φθίνουσα εἰς τὰ διαστήματα $(-\infty, -1)$ καὶ $(1, +\infty)$. Ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς εἶναι:

$$\text{Arctgh}x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \quad \forall x \epsilon R : -\infty < x < -1 \text{ καὶ } 1 < x < +\infty.$$

Καὶ ἡ παράγωγος εἶναι:

$$(\text{Arctgh}x)' = -\frac{1}{1-x^2} > 0 \quad \forall x \epsilon R : -\infty < x < -1 \text{ καὶ } 1 < x < +\infty.$$

## 12. 14 Τά θεμελιώδη θεωρήματα τῶν παραγωγισίμων συναρτήσεων (ἤ τοῦ Διαφορικοῦ λογισμοῦ)

Κατωτέρω ἀναφέρομεν τὰ βασικὰ θεωρήματα τῶν παραγωγισίμων συναρτήσεων ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων καταφαίνεται σαφῶς ὁ τεράστιος ρόλος τῆς παραγώγου εἰς τὴν λεπτομεριακὴν μελέτην τῶν συναρτήσεων. Ἐπειδὴ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν θεωρημάτων αὐτῶν ἀπαιτεῖ ἐξαιρετικὴν προσοχὴν θὰ πρέπει νὰ τὰ προσέξωμεν πολὺ μὲ τὰς παρατηρήσεις των διὰ νὰ μὴ ὑποπίπτωμεν εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα.

**Θεώρημα 1.** **Θεώρημα τοῦ Rolle**

**Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ διαστήματος [α, β] καὶ παραγωγίσιμος τουλάχιστον εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα (α, β) καὶ ἐὰν f(α) = f(β), τότε ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον ξ∈(α, β) οὕτως, ὥστε f′(ξ) = 0.**

**Ἀπόδειξις.** Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

α) ἡ f εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ [α, β], καὶ

β) ἡ f νὰ μὴν εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ [α, β].

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ f εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ [α, β] καὶ προφανῶς συνεχὴς ἐπ᾽ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν: $f(x) = f(\alpha) = f(\beta) = c$ ἂν $f(x) = c$ καὶ τοῦτο $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ (α, β) ὑπάρχει $\forall x \in (\alpha, \beta)$ καὶ εἶναι, ὡς γνωστόν, $f'(x) = 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Ἑπομένως ὑπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$, (προφανῶς $\forall \xi \in (\alpha, \beta)$) καὶ ἡ πρότασις ἰσχύει.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ f δὲν εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ [α, β], ἀλλὰ εἶναι συνεχὴς ἐπ᾽ αὐτοῦ καὶ ἰσχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, θὰ ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον $x \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f(x) > f(\alpha) = f(\beta)$ ἢ $f(x) < f(\alpha) = f(\beta)$, ἀφοῦ ἡ f δὲν εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ [α, β].

Ἔστω ὅτι εἶναι $f(x) > f(\alpha) = f(\beta)$, (1).

Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ [α, β], θὰ ὑπάρχῃ ἕνα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ f λαμβάνει τὴν μεγίστην τῶν τιμῶν της καὶ ἐπομένως: $f(\xi) = \max f(x)$, ἤτοι: $f(\xi) \geqq f(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, καὶ δυνάμει τῆς (1) εἶναι $\xi \neq \alpha$ καὶ $\xi \neq \beta$, ἄρα $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Ἐπειδὴ $\alpha \leqq x \leqq \beta$, τότε :

$$\text{ἂν } \xi < x \leqq \beta, \text{ θὰ εἶναι: } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqq 0, \text{ καὶ}$$

$$\text{ἂν } \alpha \leqq x < \xi, \text{ θὰ εἶναι: } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqq 0.$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in (\alpha, \beta)$ καὶ ἐπομένως ὑπάρχει καὶ τό:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi + 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi - 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)$$

καὶ δυνάμει τῶν προηγουμένων σχέσεων θὰ εἶναι:

$$\lim_{x \to \xi + 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqq 0 \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to \xi - 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqq 0$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει: $f'(\xi) = 0$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἂν $f(x) < f(\alpha) = f(\beta)$.

**Παρατήρησις 1.** Αἱ γενόμεναι ὑποθέσεις διὰ τὴν ἰσχὺν τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle, ἤτοι αἱ:

α) Ἡ f συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$

β) Ἡ f παραγωγίσιμος τουλάχιστον εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$

γ) $f(\alpha) = f(\beta)$,

καλοῦνται συνθῆκαι τοῦ Rolle.

**Παρατήρησις 2.** Οὐδεμία τῶν συνθηκῶν τούτων δύναται νὰ παραλειφθῇ κατὰ τὰς ἐφαρμογάς, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα, ὡς ἀποδεικνύουν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα:

α) Ἡ συνέχεια τῆς f ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ δὲν δύναται νὰ παραλειφθῇ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἔστω ἡ συνάρτησις f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} - 2 & \text{ἂν } x(0, 1] \\ 0 & \text{ἂν } x = 0. \end{cases}$$

**Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχῃ $\xi \in (0, 1)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ συνάρτησις εἶναι κατ' ἀρχὴν ἐντελῶς ὡρισμένη εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $[0, 1]$.

Ἐξετάζομεν ἂν εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[0, 1]$.

Πρὸς τοῦτο ἐξετάζομεν τὸ $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$ ἂν συμπίπτῃ μὲ τὸ $f(0) = 0$.

Ἔχομεν $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \left( \frac{2}{x} - 2 \right) = +\infty$.

Ἑπομένως ἡ f δὲν εἶναι παντοῦ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[0, 1]$. διότι εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἰσχύει $f(0) = f(1) = 0$.

Εὑρίσκομεν τὴν $f'(x)$, ἡ ὁποία εἶναι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ $\forall x \in (0, 1)$ καὶ προφανῶς εἶναι $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (0, 1)$, ἤτοι δὲν ὑπάρχει $\xi \in (0, 1)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$ καὶ τὸ συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος δὲν ἰσχύει.

Ὥστε ἡ ὑπόθεσις τῆς συνεχείας τῆς f παντοῦ ἐπὶ τοῦ [α, β] δὲν δύναται νὰ παραλειφθῇ.

β) Ἡ ὕπαρξις παραγώγου τουλάχιστον εἰς τὸ (α, β) δὲν δύναται νὰ παραλειφθῇ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἔστω ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ καὶ μὲ $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχῃ $\xi \in (-1, 1)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς ἡ f εἶναι παντοῦ ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[-1, +1]$. Ἐπίσης ἡ f εἶναι παντοῦ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[-1, +1]$. Ἐπίσης εἶναι: $f(1) = f(-1) = 0$.

Ἐναπομένει νὰ ἐξετάσωμεν ἂν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος αὐτῆς τουλάχιστον εἰς τὸ $(-1, 1)$. Ἀλλὰ ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ δὲν ὑπάρχει.

Πράγματι: $$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)-(-1)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \text{ καὶ } \lim_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty \text{ καὶ } f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)' =$$

$$= \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}.x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \forall x \in R \text{ μὲ } x \neq 0.$$

Εἶναι ἑπομένως $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (-1, 1)$ καὶ ἄρα δὲν ὑπάρχει $\xi \in (-1, +1)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$ καὶ τὸ συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος δὲν ἰσχύει.

Ὥστε ἡ f εἶναι παραγωγίσιμος τουλάχιστον ἐπὶ τοῦ (α, β) δὲν δύναται νὰ παραλειφθῇ.

γ) Ἡ ὑπόθεσις $f(\alpha) = f(\beta)$ δὲν δύναται νὰ παραλειφθῇ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = 2x^4$ καὶ $[\alpha, \beta] = [1, 2]$. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχῃ $\xi \in (1, 2)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς ἡ f εἶναι παντοῦ ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ [1, 2] καὶ παντοῦ συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ.

Ἐπίσης ἡ f παραγωγίζεται παντοῦ ἐπὶ τοῦ (1, 2) καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι: $f'(x) = 8x^3$ $\forall x \in (1, 2)$, ἀλλὰ δὲν ἰσχύει: $f(1) = f(2)$ ἀφοῦ $f(1) = 2 \neq 32 = f(2)$.

Προφανῶς εἶναι $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (1, 2)$ καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει $\xi \in (1, 2)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$, τὸ συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος δὲν ἰσχύει καὶ ἡ συνθήκη $f(\alpha) = f(\beta)$ δὲν δύναται νὰ παραλειφθῇ.

**Παρατήρησις 3.** Παρακολουθήσατε τώρα τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον διαφέρει τοῦ προηγουμένου κατὰ τὸ ὅτι: $[\alpha, \beta] = [-1, 2]$.

Ἔχομεν δηλαδὴ $f(x) = 2x^4$ καὶ $[\alpha, \beta] = [-1, 2]$. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἡ μόνη συνθήκη ἡ ὁποία δὲν πληροῦται εἶναι ἡ $f(\alpha) = f(\beta)$, διότι ἐδῶ $f(-1) = 2$ καὶ $f(2) = 32$, ἀλλὰ ὑπάρχει $\xi \in (-1, 2)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$. Πράγματι $f'(x) = 8x^3$ καὶ διὰ $x = \xi = 0$ εἶναι: $f'(\xi) = f'(0) = 0$.

Τοῦτο ἀποδεικνύει, ὅτι ἂν παραλείψωμεν μίαν τῶν συνθηκῶν, εἶναι

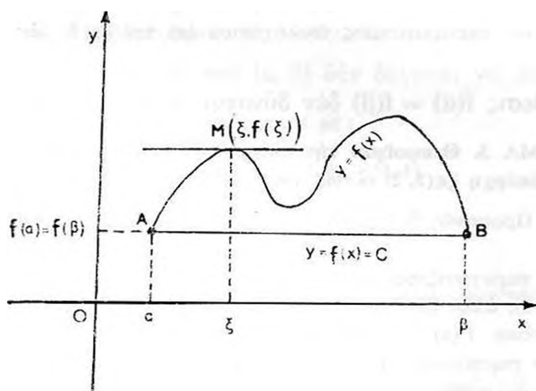
δυνατὸν νὰ μὴν ὁδηγηθῶμεν εἰς ἄτοπον, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι αἱ συνθῆκαι τοῦ Rolle εἶναι ἱκαναί, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ $\xi\epsilon(\alpha, \beta)$ μὲ $f'(\xi) = 0$, ὄχι ὅμως καὶ ἀναγκαῖαι.

**Παρατήρησις 4.** Τὸ θεώρημα τοῦ Rolle ἔχει ἐφαρμογὴν καὶ ἀκόμη ὅταν διὰ κάποιο $x_0$ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ $(\alpha, \beta)$ ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = x_0 \epsilon (\alpha, \beta)$ ἀπειρίζεται. Αὐτὸ συμβαίνει, διότι οὐδεὶς περιορισμὸς ὑφίσταται διὰ τὴν παράγωγον εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ $(\alpha, \beta)$, ἀρκεῖ ἡ f νὰ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$, ἀφοῦ ὁ ἀπειρισμὸς τῆς παραγώγου εἰς ἕνα σημεῖον $x_0 \epsilon (\alpha, \beta)$ ἐκφράζει ἁπλῶς ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν y.

*Σημείωσις :* Κατωτέρω μετὰ τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle ἀναφέρομεν καὶ ἄλλα παραδείγματα, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἐφαρμόζεται τὸ θεώρημα, μετὰ τῆς γραφικῆς των παραστάσεως.

## 12. 15 Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ Θεωρήματος τοῦ Rolle μετὰ τῶν σχετικῶν παρατηρήσεων.

Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = c \ \forall x \epsilon [\alpha, \beta]$ ἔχει διάγραμμα τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Ἐπειδὴ




$f'(x) = 0 \ \forall x \epsilon [\alpha, \beta]$, ἕπεται ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος τῆς f εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x εἰς κάθε σημεῖον $x \epsilon (\alpha, \beta)$ (συμπίπτει μὲ τὴν AB).

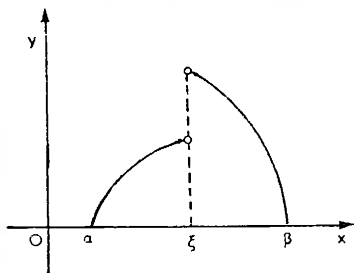
Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ f δὲν εἶναι σταθερὰ ἐν $[\alpha, \beta]$, τότε τὸ διάγραμμα τῆς f εἶναι μία «συνεχὴς» γραμμή, ἡ ὁποία ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ σημεῖον A $[\alpha, f(\alpha)]$ καὶ καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον B $[\beta, f(\beta)]$. Εἰς κάθε σημεῖον τῆς γραμμῆς μεταξὺ τῶν A καὶ B ὑπάρχει καὶ μία ἐφαπτο-

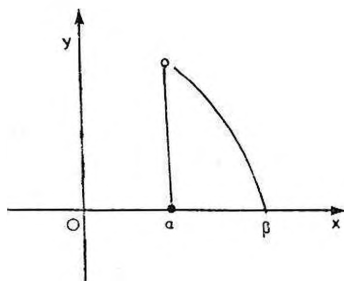
μένη, ἐν γένει ὄχι παράλληλος, τοῦ ἄξονος τῶν y. Τὸ θεώρημα τοῦ Rolle μᾶς πληροφορεῖ ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τῆς γραμμῆς (διάφορον τῶν ἄκρων), ὅπου ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς εἰς αὐτὸ εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x. Εἰς τὸ σχῆμα εἰς τὸ σημεῖον M[ξ, f(ξ)] ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x. Εὐκόλως ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι δὲν εἶναι καὶ τὸ μοναδικόν.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Ἡ f μὲ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ καὶ $\mathcal{D}(f) = R$ εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα [1, 3] εἶναι προφανῶς συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in (1, 3)$ μὲ $f'(x) = 2x - 4$ καὶ $f(1) = f(3) = 0$.

Εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ τὸ σημεῖον ξ εἶναι μοναδικόν, διότι $f'(\xi) = 0 \iff \xi = 2$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Ἡ f μὲ $f(x) = x^3 - x$ εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in R$. Εἰς τὸ διάστημα [—1, 1] εἶναι: $f(-1) = f(1) = 0$ καὶ ἐπειδὴ $f'(x) = 3x^2 - 1$, ὑπάρχουν δύο σημεῖα $\xi_1, \xi_2 \in (-1, +1)$, ὥστε $f'(\xi_1) = 0$ καὶ $f'(\xi_2) = 0$, εἶναι τὰ $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ καὶ $\xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$.




Ἡ προϋπόθεσις τῆς συνεχείας εἰς τὸ [α, β] εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ ξ∈(α, β).

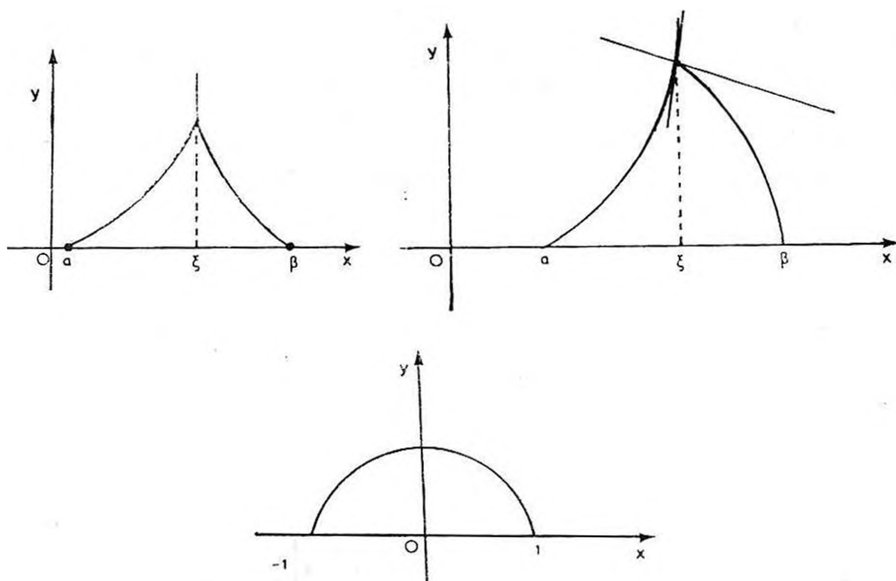
Εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ [α, ξ], ἀσυνεχὴς εἰς τὸ ξ, καὶ φθίνουσα εἰς τὸ [ξ, β].

Εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα φαίνεται ὅτι ἡ συνέχεια εἰς τὰ ἄκρα α, β εἶναι ἀπαραίτητος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{ἂν } x \neq 1 \\ 0 & \text{ἂν } x = 1 \end{cases}$ καὶ ἰσχύει $f(1) = f(2) = 0$ καὶ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ (1, 2], ὄχι ὅμως καὶ εἰς τὸ [1, 2] καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle δὲν ἔχει ἐφαρμογήν.

Ἡ προϋπόθεσις τῆς ὑπάρξεως παραγώγου εἰς τὸ ξ∈(α, β) πεπερασμένης ἢ καὶ ἀπείρου εἶναι ἀπαραίτητος. Εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα τὸ διάγραμμα

τῆς f ἔχει διὰ μίαν τιμὴν $x = \xi \in (\alpha, \beta)$ ἐφαπτομένην παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα αἱ ἐφαπτόμεναι σχηματίζουν




γωνίαν καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ ξ. Οὕτως ἂν

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{ἂν } x \in [1, 2] \\ 3 - x & \text{ἂν } x \in [2, 3] \end{cases}$$

δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 2$ καὶ τὸ θεώρημα δὲν ἔχει ἐφαρμογήν.

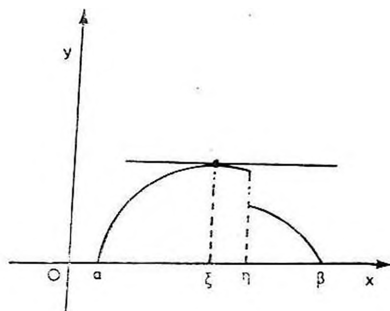
Ἀντιθέτως, ἡ ὕπαρξις παραγώγου εἰς τὰ ἄκρα δὲν εἶναι ἀπαραίτητος, ὡς δεικνύει τὸ τρίτον σχῆμα, ἀναφερόμενον εἰς τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ καὶ μὲ διάστημα τὸ $[-1, 1]$. Ὑπάρχει ἐδῶ $\xi \in (-1, 1)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$ εἶναι τὸ $\xi = 0$, ἐνῶ αἱ παράγωγοι, εἰς τὰ ἄκρα ἀπειρίζονται.

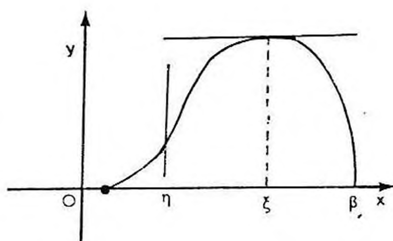
Τὰ κατωτέρω σχήματα δεικνύουν, ὅτι αἱ συνθῆκαι τοῦ Rolle εἶναι ἱκαναί, ὄχι ὅμως καὶ ἀναγκαῖαι διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$.

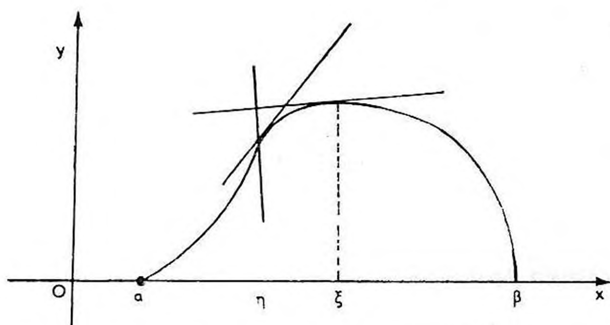
Τὸ θεώρημα τοῦ Rolle ἐφαρμόζεται ἀκόμη καὶ ὅταν διὰ τὴν συνάρτησιν f ἰσχύουν:

1) ἡ f ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, +\infty)$ ἢ $(-\infty, \beta]$,

2) ἡ f′ ἐντελῶς ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ $(\alpha, +\infty)$ ἢ $(-\infty, \beta)$

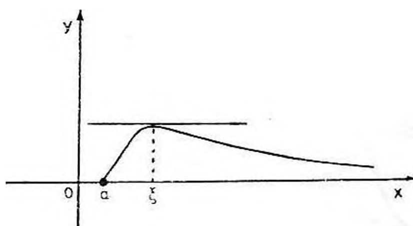


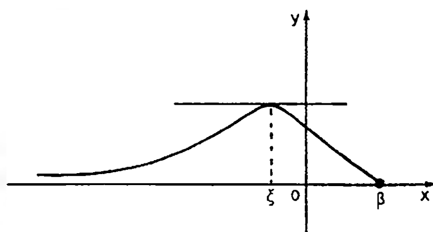




3) $f(\alpha) = 0$ καὶ τὸ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ἢ $f(\beta) = 0$ καὶ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Ταῦτα γίνονται ἀμέσως φανερὰ καὶ ἐκ τῶν κάτωθι σχημάτων.




## 12. 16 Θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς (Lagrange)

**Ἐὰν ἡ συνάρτησις f μὲ $\mathcal{D}(f) = [\alpha, \beta]$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος τουλάχιστον εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$, τότε ὑπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε :**

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

**Ἀπόδειξις.** Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f_1$ μὲ τύπον :

$$f_1(x) = f(\alpha) - f(x) + (x - \alpha)\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \text{καὶ μὲ} \quad \mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f) = [\alpha, \beta].$$

Ἡ συνάρτησις $f_1$ πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ Rolle διότι:

α) Εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ ὡς ἄθροισμα συνεχῶν συναρτήσεων.

β) Ὑπάρχει ἡ παράγωγος αὐτῆς ἡ ὁποία εἶναι:

$$f'_1(x) = -f'(x) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

γ) $f_1(\alpha) = f_1(\beta) = 0$

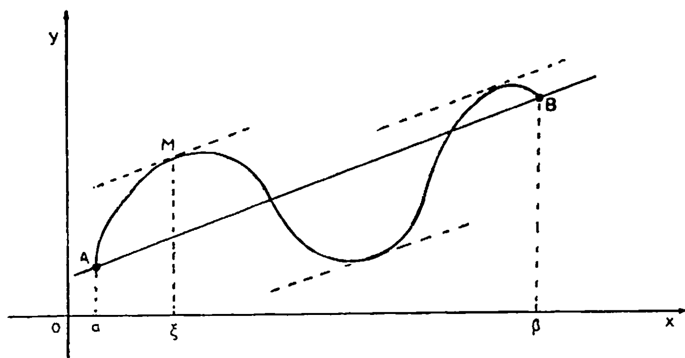
καὶ ἑπομένως ὑπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε:

$$f'_1(\xi) = 0 \Longleftrightarrow f'_1(\xi) = -f'(\xi) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0 \Longleftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

*Σημείωσις*. Τὸ θεώρημα λέγεται καὶ «θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων».

## 12.17 Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ θεωρήματος

Τὸ διάγραμμα μιᾶς συναρτήσεως f ἡ ὁποία πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ Rolle εἰς τὸ $[\alpha, \beta]$ εἶναι ἕνα τόξον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Ἡ ἰσχὺς τοῦ θεωρήματος μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρ-




ξιν ἑνὸς σημείου ἐπὶ τοῦ τόξου εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα x′Ox καὶ ἑπομένως παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν AB. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς διατηροῦντες τὰς δύο πρώτας ὑποθέσεις, δηλαδὴ τὴν συνέχειαν τῆς f καὶ τὴν παραγωγισιμότητα αὐτῆς, ἀλλὰ παραλείποντες τὴν συνθήκην $f(\alpha) = f(\beta)$, ἀγόμεθα εἰς

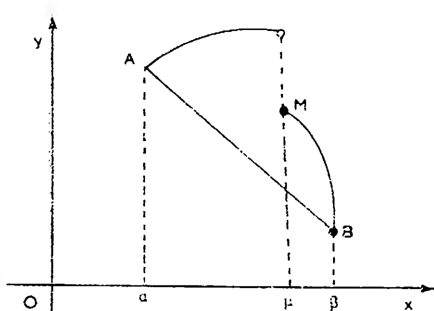
τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὑπάρχει σημεῖον ἐπὶ τοῦ τόξου εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν AB, ἀλλὰ τώρα «πλαγίαν».

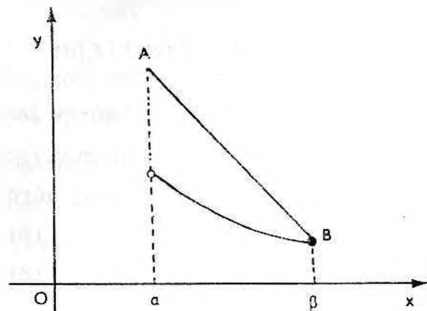
Πράγματι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως λ τῆς AB εἶναι $\lambda = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ καὶ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς μᾶς πληροφορεῖ περὶ τῆς ὑπάρξεως ἑνὸς τουλάχιστον σημείου M, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ξ∈(α, β), εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος τῆς AB.

**Παρατήρησις 1.** Τὸ β — α ἐκφράζει τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς μεταξὺ τῶν β καὶ α καὶ τὸ f(β) — f(α) τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς συναρτήσεως καὶ εἰς τὸ θεώρημα χρησιμοποιοῦντες τὰς αὐξήσεις αὐτὰς αἱ ὁποῖαι εἶναι πεπερασμέναι καλεῖται, ὡς εἴπομεν, θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων εἰς ἀντίθεσιν τῶν ἀπειροστῶν ποὺ χρησιμοποιοῦμεν συχνὰ εἰς τὴν Ἀνάλυσιν.

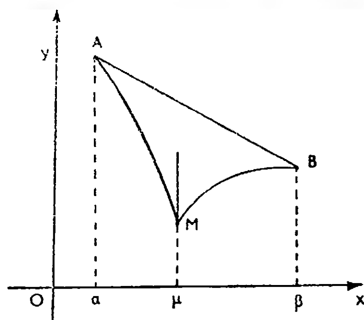
**Παρατήρησις 2.** Ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα τὸ σημεῖον M δὲν εἶναι τὸ μοναδικὸν πάντοτε.

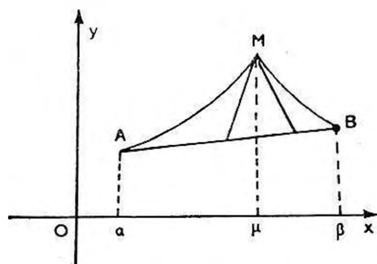
**Παρατήρησις 3.** Ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle ἡ συνέχεια τῆς f εἰς τὸ [α, β] εἶναι ἀπαραίτητος, ὡς δεικνύουν τὰ σχήματα.




Ἐπίσης ἡ ὕπαρξις παραγώγου εἶναι ἀπαραίτητος εἰς τὸ (α, β), ὡς δεικνύουν τὰ ἀκόλουθα σχήματα.



**Παρατήρησις 4.** Ὅπως καὶ εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Rolle οὕτω καὶ ἐδῶ αἱ συνθῆκαι εἶναι ἱκαναὶ διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ ξ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀναγκαῖαι.

## 12. 18 Γενικευμένον θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς (Cauchy)

**Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ ὡρισμέναι ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ συνεχεῖς ἐπ' αὐτοῦ εἶναι παραγωγίσιμοι τουλάχιστον εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ $f_2'(x) \neq 0$ $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$, τότε ὑπάρχει $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε :**

$$\frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)} = \frac{f_1(\beta) - f_1(\alpha)}{f_2(\beta) - f_2(\alpha)}$$

**Ἀπόδειξις.** Κατ' ἀρχὴν δεικνύεται εὐκόλως, ὅτι δὲν εἶναι $f_2(\beta) = f_2(\alpha)$. Διότι ἂν τοῦτο συνέβαινε, τότε κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle θὰ ὑπῆρχε $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f'_2(\xi) = 0$, ἄτοπον, ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως $f_2'(x) \neq 0$ $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$.

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν F μέ :

$$F(x) = f_1(x) - f_1(\alpha) - \frac{f_1(\beta) - f_1(\alpha)}{f_2(\beta) - f_2(\alpha)} (f_2(x) - f_2(\alpha)]$$

μὲ $\mathcal{D}(F) = [\alpha, \beta]$, τότε δι' αὐτὴν ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι τοῦ Rolle, διότι :

α) Εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$.

β) Ὑπάρχει ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ εἶναι :

$$F'(x) = f'_1(x) - \frac{f_1(\beta) - f_1(\alpha)}{f_2(\beta) - f_2(\alpha)} \cdot f'_2(x) \quad \forall x \epsilon (\alpha, \beta).$$

γ) $F(\alpha) = F(\beta) = 0$.

Ἑπομένως ὑπάρχει $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $F'(\xi) = 0$.

Ἄρα : $F'(\xi) = f'_1(\xi) - \frac{f_1(\beta)-f_1(\alpha)}{f_2(\beta)-f_2(\alpha)} f'_2(\xi) = 0 \iff \frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)} = \frac{f_1(\beta) - f_1(\alpha)}{f_2(\beta) - f_2(\alpha)}$.

## 12. 19 Ἐφαρμογαὶ τῶν θεωρημάτων τοῦ Rolle καὶ μέσης τιμῆς

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. **Ἐὰν ἡ συνάρτησις f ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ πληρῇ τὰς συνθήκας τοῦ Rolle καὶ τὰ $\alpha, \beta$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$ (δηλαδὴ $f(\alpha) = f(\beta) = 0$), τότε μεταξὺ τῶν α καὶ β ὑπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα τῆς παραγώγου $f'(x)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ διὰ τὴν f πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τοῦ Rolle, θὰ

ὑπάρχη $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$, ἤτοι ὑπάρχει ρίζα τῆς παραγώγου $f'(x)$ κειμένη μεταξὺ α καὶ β.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ἐὰν ἡ συνάρτησις f ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ πληρῆ τὰς συνθήκας τοῦ Rolle καὶ ἂν $\xi_1, \xi_2$ δύο διαδοχικαὶ πραγματικαὶ ρίζαι τῆς παραγώγου $f'(x)$ (μὲ $\xi_1 < \xi_2$), τότε ὑπάρχει τὸ πολὺ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, μεταξὺ $\xi_1$ καὶ $\xi_2$.**

**Ἀπόδειξις.** Διότι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι μεταξὺ $\xi_1$ καὶ $\xi_2$ ὑπάρχουν δύο διακεκριμέναι ρίζαι $x_1, x_2 \epsilon R$ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, τότε, ἐπειδὴ $\xi_1 < < x_1 < x_2 < \xi_2$, ἡ συνάρτησις f θὰ εἶναι ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ $[x_1, x_2]$ καὶ ὡς πληροῦσα εἰς τὸ διάστημα τοῦτο τὰς συνθήκας τοῦ Rolle (διότι ἡ f ὡς συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ εἶναι συνεχὴς καὶ ἐπὶ τοῦ $[x_1, x_2] \subset [\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμος ἐν $(x_1, x_2)$ καὶ $f(x_1) = f(x_2) = 0$), θὰ ὑπῆρχε $\xi \epsilon (x_1, x_2)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$, ἤτοι θὰ ὑπῆρχε μεταξὺ $\xi_1, \xi_2$ καὶ ἄλλη ρίζα τῆς $f'(x) = 0$, ἄτοπον, ἀφοῦ αἱ $\xi_1, \xi_2$ ὑπετέθησαν διαδοχικαί.

Ὥστε μεταξὺ $\xi_1$ καὶ $\xi_2$ ὑπάρχει (ἂν ὑπάρχη) τὸ πολὺ μία ρίζα τῆς $f(x) = 0$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ μὲ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \epsilon R$ καὶ $\nu \epsilon N : \nu \geqq 2$, $(\alpha_\nu \neq 0)$ ἔχῃ μ τὸ πλῆθος διακεκριμένας πραγματικὰς λύσεις, τότε τὸ πολυώνυμον - παράγωγος $f'(x)$ ἔχει τουλάχιστον $\mu - 1$ πραγματικὰς λύσεις.**

**Ἀπόδειξις.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ μ τὸ πλῆθος πραγματικαὶ καὶ διακεκριμέναι λύσεις τοῦ $f(x)$ εἶναι αἱ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ καὶ ἔστω ὅτι :

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \ldots < \xi_\mu.$$

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν ἕνα οἱονδήποτε διάστημα ὁριζόμενον ὑπὸ δύο διαδοχικῶν πραγματικῶν ριζῶν, π.χ. τὸ $[\xi_n, \xi_{n+1}]$, ὅπου $n = 1, 2, \ldots, \mu - 1$, τότε ἡ συνάρτησις f (πολυωνυμική) εἰς τὸ διάστημα τοῦτο πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ Rolle. Τότε ὅμως ὑπάρχει $\xi \epsilon (\xi_n, \xi_{n+1})$ (τουλάχιστον ἕνα) οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = 0$. Τοῦτο ὅμως σημαίνει, ὅτι ὑπάρχει ρίζα τῆς παραγώγου $f'(x)$ μεταξὺ $\xi_n$ καὶ $\xi_{n+1}$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὰ διαστήματα εἶναι $\mu - 1$ τὸ πλῆθος, ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν τουλάχιστον $\mu - 1$ πραγματικαὶ ρίζαι τῆς παραγώγου.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + + \alpha_1 x + \alpha_0$ μὲ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \epsilon R$ $\nu \epsilon N : \nu \geqq 1$ καὶ $\alpha_\nu \neq 0$ ἔχει τὸ πολὺ ν τὸ πλῆθος πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας λύσεις.**

**Ἀπόδειξις.** Διότι ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ f ἔχει $\nu + 1$ τὸ πλῆθος πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας λύσεις, τότε τὸ $f'(x)$ ἔχει τουλάχιστον ν τὸ

πλῆθος πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας λύσεις, τότε ὅμως τὸ $f''(x)$ θὰ ἔχῃ $\nu-1$ τὸ πλῆθος πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας λύσεις κ.ο.κ., ὅτε εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ $f^{(\nu)}$ θὰ ἔχῃ τουλάχιστον $\nu-(\nu-1)=1$ τὸ πλῆθος πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας λύσεις, ἄτοπον, ἐπειδὴ τὸ $f^{(\nu)}$ εἶναι μία σταθερά, ἀφοῦ $f^{(\nu)}(x)=\nu!\alpha_\nu$.

Ἀγόμεθα ὅθεν εἰς τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα.

Κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς καὶ βαθμοῦ ν δὲν δύναται νὰ ἔχῃ πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας λύσεις περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι παραγωγίσιμος $\forall x\in\mathcal{D}(f)$ καὶ ἰσχύῃ $f'(x)=0$ $\forall x\in\mathcal{D}(f)$, τότε ἡ f εἶναι μία σταθερὰ ἐν $\mathcal{D}(f)$ καὶ ἀντιστρόφως.**

**Ἀπόδειξις.** Διότι ἂν $\xi_1, \xi_2 \in\mathcal{D}(f)$ μὲ $\xi_1<\xi_2$, τότε ἡ f εἰς τὸ διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ καὶ παραγωγίσιμος ἐν $(\xi_1, \xi_2)$ καὶ τότε, κατὰ τὸ θεώρημα μέσης τιμῆς, ὑπάρχει $\xi\in(\xi_1, \xi_2)$ οὕτως, ὥστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}.$$

Ἀλλὰ $f'(\xi)=0$, ἐξ ὑποθέσεως. Ὁπότε ἀφοῦ $\xi_1\neq\xi_2$ θὰ εἶναι καὶ $f(\xi_1)=$ $=f(\xi_2)$ καὶ τοῦτο $\forall\xi_1, \forall\xi_2\in\mathcal{D}(f)$. Ἑπομένως ἀφοῦ $\forall x\in\mathcal{D}(f)$ εἶναι $f(x)=c$, ἕπεται ἡ f σταθερὰ ἐν $\mathcal{D}(f)$. Τὸ ἀντίστροφον ἁπλοῦν.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 6. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι ὡρισμέναι ἐν $\mathcal{D}(f_1)\cap$ $\cap\mathcal{D}(f_2)=\mathcal{D}$ καὶ παραγωγίσιμοι ἐν $\mathcal{D}$ καὶ ἰσχύῃ $f'_1(x)=f'_2(x)$ $\forall x\in\mathcal{D}$, τότε αὗται διαφέρουν κατὰ σταθερὰν ἤτοι: $f_1(x)=f_2(x)+c$ $\forall x\in\mathcal{D}$, καὶ ἀντιστρόφως.**

**Ἀπόδειξις.** Διότι ἂν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν F μὲ $F(x)=f_1(x)-$ $-f_2(x)$ μὲ $\mathcal{D}(F)=\mathcal{D}$ θὰ ἔχωμεν : $F'(x)=f'_1(x)-f'_2(x)=0$ $\forall x\in\mathcal{D}$. Τότε ὅμως : $F(x)=c$, ἄρα $f_1(x)=f_2(x)+c$. Προφανῶς τὸ ἀντίστροφον ἁπλοῦν.

## 12. 20 Παρατηρήσεις ἐπὶ ὅλων τῶν προηγουμένων

**Παρατήρησις 1.** Τὸ γενικευμένον θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς (Cauchy) ἰσχύει καὶ ὅταν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων $f_1$ καὶ $f_2$ ἀπειρίζωνται, ὄχι ὅμως συγχρόνως εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ διαστήματος (α, β).

**Παρατήρησις 2.** Ἐὰν εἰς τὸ θεώρημα Cauchy ὑποτεθῇ ὅτι $f_1(\alpha)=$ $=f_2(\alpha)=0$, τότε $\forall x\in(\alpha, \beta)$ ὑπάρχει $\xi\in(\alpha, x)$ οὕτως, ὥστε :

$$\frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)}=\frac{f_1(x)-f_1(\alpha)}{f_2(x)-f_2(\alpha)}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

**Παρατήρησις 3.** Εἰς τὸ θεώρημα Cauchy ἂν ὑποτεθῇ ὅτι $f_2(x) = x$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)} = \frac{f_1(\beta) - f_1(\alpha)}{f_2(\beta) - f_2(\alpha)} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $f'_2(x) = 1$ καὶ ἄρα $f'_2(\xi) = 1$ καὶ $f_2(\beta) - f_2(\alpha) = \beta - \alpha$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$f_1(\beta) - f_1(\alpha) = (\beta - \alpha) . f'_1(\xi)$$

καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Lagrange.

**Παρατήρησις 4.** Γνωρίζομεν, ὅτι ἰσχύει:

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(\xi) \quad \text{μὲ} \quad \alpha < \xi < \beta$$

καὶ ὁμοίως:

$$f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha - \beta)f'(\xi) \quad \text{μὲ} \quad \beta < \xi < \alpha$$

καὶ ἑπομένως χωρὶς νὰ ἐξετάσωμεν τὴν σχέσιν μεγέθους τῶν α καὶ β δυνάμεθα νὰ γράφωμεν:

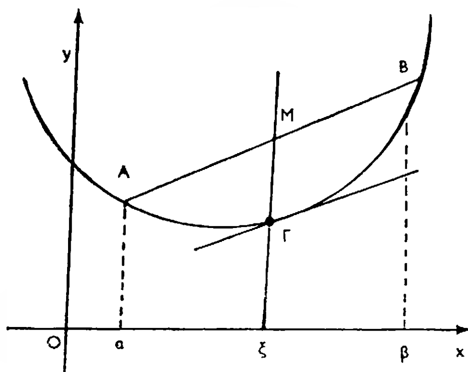
$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(\xi)$$

μὲ ξ μεταξὺ $x_1$ καὶ $x_2$ (γνησίως).

Ἐὰν τώρα τεθῇ $\beta = \alpha + \varepsilon \iff \beta - \alpha = \varepsilon$, τότε ἂν ξ μεταξὺ α καὶ α+ε θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\xi - \alpha$ θὰ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ ε καὶ συνεπῶς τὸ $\frac{\xi - \alpha}{\varepsilon}$ θὰ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ 1. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{\xi - \alpha}{\varepsilon} = \theta$ μὲ $0 < \theta < 1$, θὰ ἔχωμεν: $\xi = \alpha + \varepsilon\theta$ καὶ τότε ὁ τύπος ὁ ἐκφράζων τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\boxed{f(\alpha + \varepsilon) - f(\alpha) = \varepsilon f'(\alpha + \varepsilon\theta) \quad \text{μὲ} \quad 0 < \theta < 1}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου αὐτοῦ εἰς τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x^2 + px + q/p$, $q \in R$.**



**Ἀπάντησις.** Ἡ f πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ θεωρήματος εἰς κάθε διάστημα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της R.

Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι : $f'(x) = 2x+p$.

Ἔχομεν $f(\alpha+\varepsilon) - f(\alpha) = (\alpha+\varepsilon)^2 + p(\alpha+2) + q - \alpha^2 - p\alpha - q = (2\alpha+p)\varepsilon+\varepsilon^2$. καὶ ἑπομένως : $(2\alpha+p)\varepsilon+\varepsilon^2 = \varepsilon[2(\alpha+\theta\varepsilon)+p] \Longleftrightarrow \theta = \frac{1}{2}$. Διὰ τὴν συνάρτησιν f ὁ θ εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος πρὸς $\frac{1}{2}$. Τοῦτο γεωμετρικῶς σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν χορδὴν τῶν σημείων Α καὶ Β ἔχει τετμημένην ἴσην πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς, ἤτοι ἡ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y διχοτομεῖ τὴν ΑΒ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ εἰς τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \frac{1}{x}$. Νὰ μελετηθοῦν οἱ ἀριθμοὶ ξ, θ.**

**Ἀπάντησις.** Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος εἰς τὴν συνάρτησιν $f(x) = \frac{1}{x}$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ ἄκρα τοῦ διαστήματος (α, β) νὰ εἶναι ὁμόσημα.

Ἡ παράγωγος εἶναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Ἑπομένως ὑπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως ὥστε :

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = (\beta - \alpha) \cdot \frac{-1}{\xi^2}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $\xi^2 = \alpha\beta$.

Ἐὰν $\alpha > 0$, $\beta > 0$, τότε $\xi = \sqrt{\alpha\beta}$ καὶ ἂν $\alpha<0$ $\beta<0$, τότε $\xi = -\sqrt{\alpha\beta}$ (ἀφοῦ ξ μεταξὺ α καὶ β). (Ἑπομένως ὁ $|\xi|$ εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν α, β).

Ὁ ἀριθμὸς θ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\theta = \frac{\xi - \alpha}{\beta - \alpha}$. Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $\beta > 0$, τότε:

$$\theta = \frac{\sqrt{\alpha\beta} - \alpha}{\beta - \alpha} = \sqrt{\alpha}\ \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}$$

ἀναλόγως ἂν $\alpha<0$ καὶ $\beta<0$.

**Παρατήρησις 5.** Τονίζομεν, ὅτι τὰ θεωρήματα 5 καὶ 6 δὲν ἰσχύουν ἀντιστρόφως ἐὰν τὸ $\mathscr{D}(f)$ εἶναι ἕνωσις διαστημάτων. Τοῦτο δεικνύουν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f ὁριζομένην ὡς ἀκολούθως :**

$$f(x) = \begin{cases} c \neq 0 & \text{ἂν } x \in R^+ \\ -c & \text{ἂν } x \in R^- \end{cases}$$

**ποία ἡ παράγωγος αὐτῆς; Τί παρατηρεῖτε;**

Ἀπάντησις. Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ καὶ $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathscr{D}(f)$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἂν καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς $\forall x \in \mathscr{D}(f)$ εἶναι μηδὲν δὲν εἶναι μία σταθερὰ ἐπὶ τοῦ $\mathscr{D}(f)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ μὲ $f_1(x) = x$ καὶ $\mathscr{D}(f_1) = R - \{0\}$ καί:

$$f_2(x) = \begin{cases} x+c & \text{ἂν } x \in R^+ \\ x-c & \text{ἂν } x \in R^- \quad (c \neq 0) \end{cases}$$

Ποῖαι αἱ παράγωγοι αὐτῶν. Τί παρατηρεῖτε;

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathscr{D}(f_2) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ἡ παράγωγος τῆς $f_1$ εἶναι $f'_1(x) = 1 \ \forall x \in \mathscr{D}(f_1)$ καὶ ἡ παράγωγος τῆς $f_2$ εἶναι $f'_2(x) = 1 \ \forall x \in \mathscr{D}(f_2)$. Ὥστε $\forall x \in \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$ ἔχουν ἴσας παραγώγους, παρὰ ταῦτα ἡ διαφορά των δὲν εἶναι μία σταθερὰ $\forall x \in \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$, ἀφοῦ $f_1(x) - f_2(x) = -c$ ἂν $x \in R^+$ καὶ $f_1(x) - f_2(x) = c$ ἂν $x \in R^-$.

**Παρατήρησις 6.** Εἰς τὸ θεώρημα 2 ἂν ἰσχύῃ $f(\xi_1) f(\xi_2) < 0$, τότε εἰς τὸ διάστημα $(\xi_1, \xi_2)$ ὑπάρχει ἀκριβῶς μία ρίζα τῆς $f(x) = 0$. Διότι, ὡς γνωστόν, ἀφοῦ $f(\xi_1) f(\xi_2) < 0$ θὰ εἶναι, ἔστω $f(\xi_1) < 0 < f(\xi_2)$, ἀλλὰ τότε, ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὰς συνεχεῖς συναρτήσεις, ὑπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ οὕτως, ὥστε $f(\xi) = 0$ καὶ προφανῶς κατὰ τὸ θεώρημα μοναδικόν.

**Παρατήρησις 7.** Ἐπανερχόμενοι καὶ πάλιν εἰς τὸ θεώρημα 2 παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν διὰ τὰς ρίζας $x_1, x_2$ ὑποτεθῇ $x_1 = x_2$, δηλαδὴ ἡ μεταξὺ τῶν $\xi_1$ καὶ $\xi_2$ περιεχομένη ρίζα τῆς $f(x) = 0$ νὰ εἶναι πολλαπλῆ, τότε, ὡς θὰ εἴδωμεν ἀργότερον, θὰ ἔχωμεν $f'(x_1) = 0$ καὶ ἐπομένως μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ριζῶν τῆς $f'(x) = 0$ θὰ ὑπῆρχε καὶ ἡ $x_1$ ἄτοπον.

Διὰ τὴν περίπτωσιν ἀκεραίου πολυωνύμου τὸ ζήτημα εἶναι ἁπλοῦν.

Πράγματι, ἂν ἡ πραγματικὴ ρίζα ρ τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι πολλαπλότητος $k \in N$, τότε ἡ ρ εἶναι καὶ ρίζα τῆς παραγώγου πολλαπλότητος $k-1$.

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω ὅτι : $f(x) \equiv (x-\rho)^k . \pi(x)$ μὲ $\pi(\rho) \neq 0$. Θὰ ἔχωμεν:

$$f'(x) \equiv k(x-\rho)^{k-1} . \pi(x) + (x-\rho)^k . \pi'(x) \equiv (x-\rho)^{k-1}[k\pi(x) + (x-\rho)\pi'(x)]$$

καὶ ἐπειδὴ $k\pi(\rho) + (\rho-\rho)\pi'(\rho) = k\pi(\rho) \neq 0$, ἡ ρ εἶναι ρίζα τῆς παραγώγου πολλαπλότητος $k-1$.

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $f(x)$ καὶ ἡ παράγωγος αὐτοῦ $f'(x)$ ἔχουν τὴν ρίζαν $\rho \in R$ κοινὴν καὶ εἶναι πολλαπλότητος $k-1$ διὰ τὴν παράγωγον, τότε θὰ εἶναι πολλαπλότητος $k$ διὰ τὸ $f(x)$. Διότι ἂν ἡ ρ ἦτο πολλαπλότητος $\mu \in N$ διὰ τὸ $f(x)$, τότε διὰ τὴν παράγωγον θὰ ἦτο πολλαπλότητος $\mu - 1$. Εὐκόλως ἕπεται, ὅτι $\mu = k$.

## 12. 21 Κριτήρια μονοτονίας μιᾶς συναρτήσεως

Αἱ κατωτέρω προτάσεις ἀναφέρονται εἰς τὸ μονότονον μιᾶς συναρτήσεως εἰς ἕνα διάστημα (α, β) καὶ εἰς τὴν συμπεριφορὰν μιᾶς συναρτήσεως εἰς ἕνα σημεῖον $\xi \in (\alpha, \beta)$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. Ἐὰν συνάρτησις f εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ ἰσχύη $f'(x) > 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐὰν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ μὲ $\xi_1 < \xi_2$, τότε ἐπειδὴ ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς, θὰ ὑπάρχη $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$f(\xi_1) - f(\xi_2) = f'(\xi)\,(\xi_1 - \xi_2).$$

Ἐπειδὴ ὅμως $f'(\xi) > 0$, ἀφοῦ $f'(x) > 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ καὶ ἀφοῦ $\xi_1 < \xi_2$, θὰ εἶναι καὶ $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ καὶ ἑπομένως ἀφοῦ διὰ τυχόντα $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ μὲ $\xi_1 < \xi_2$ εἶναι καὶ $f(\xi_1) < f(\xi_2)$, ἕπεται ὅτι f γνησίως αὔξουσα ἐν $(\alpha, \beta)$.

**Παρατήρησις.** Τὸ ἀντίστροφον τῆς προτάσεως δὲν ἰσχύει, δηλαδὴ ἂν f γνησίως αὔξουσα ἐν $(\alpha, \beta)$, δὲν ἕπεται ἀναγκαίως καὶ $f'(x) > 0$, διότι, ὡς γνωστόν, ἂν ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα, θὰ ἰσχύη:

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0, \text{ ἐνῶ } \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqq 0 \text{ καὶ ἑπομένως } f'(\xi) \geqq 0.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x^5$ καὶ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς τὸ $(-1, +1)$. Δείξατε ὅτι δὲν εἶναι $f(x) > 0 \ \forall x \in (-1, +1)$.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς ἂν $\xi_1 < \xi_2$ μὲ $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ θὰ εἶναι καὶ $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ καὶ εἶναι ἡ f γνησίως αὔξουσα ἐν $(-1, 1)$. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι $f'(x) = 5x^4$ καὶ δὲν εἶναι $f'(x) > 0 \ \forall x \in (-1, 1)$ ἀφοῦ $f'(0) = 0$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ ἰσχύη $f'(x) \geqq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε ἡ f εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἀπόδειξις ἐντελῶς ὁμοία ἀφοῦ τώρα $f'(x) \geqq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$, ὅτε $f \uparrow$ ἐν $(\alpha, \beta)$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ εἶναι $f'(x) < 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε f γνησίως φθίνουσα ἐν $(\alpha, \beta)$.**

Ἀπόδειξις. Ὁμοίως ὡς ἄνω.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ εἶναι $f'(x) \leqq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε ἡ $f \downarrow$ ἐν $(\alpha, \beta)$.**

Ἀπόδειξις. Ὁμοίως ὡς ἄνω.

**Παρατήρησις 1.** Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ δὲν ὑπάρχη διάστημα $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f'(x) = 0 \ \forall x \in (\xi_1, \xi_2)$ καὶ $f'(x) \geqq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ ἢ ἀντιστοίχως $f'(x) \leqq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε ἡ f γνη-

σίως αὔξουσα ἐν (α, β), ἀντιστοίχως ἡ f γνησίως φθίνουσα ἐν (α, β).

Διότι ἂν $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$ δυνάμει τῶν προηγουμένων θὰ ἔχωμεν: $f\uparrow$ ἐν (α, β), τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι ἂν $\xi_1 < x < \xi_2$ θὰ ἰσχύη $f(\xi_1) \leq f(x) \leq \leq f(\xi_2)$. Ἐὰν λοιπὸν ἦτο $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, τότε $f(x) = c$ $\forall x \in (\xi_1, \xi_2)$ καὶ ἐπομένως θὰ ἦτο $f'(x) = 0$ $\forall x \in (\xi_1, \xi_2)$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει $x \in (\xi_1, \xi_2)$ οὕτως, ὥστε $f'(x) = 0$. Δὲν εἶναι συνεπῶς $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ καὶ ἄρα $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ καὶ ἡ f γνησίως αὔξουσα ἐν (α, β).

Ἡ ἀπόδειξις ὁμοία ἂν $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

**Παρατήρησις 2.** Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι γνησίως μονότονος ἐν (α, β), τότε δὲν ὑπάρχει διάστημα $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f'(x) = 0$ $\forall x \in (\xi_1, \xi_2)$.

Διότι ἂν ὑπῆρχε διάστημα $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε: $f'(x) = 0$ $\forall x \in (\xi_1, \xi_2)$, θὰ ἔπρεπε $f(x) = c$ $\forall x \in (\xi_1, \xi_2)$ τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἡ f δὲν θὰ ἦτο γνησίως μονότονος ἐν (α, β) καὶ ἐπομένως ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον.

**Παρατήρησις 3.** Θὰ πρέπει νὰ προσέξωμεν ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἄνω προτάσεων πρέπει νὰ γίνεται εἰς συναρτήσεις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἕνα συνεχὲς ὑποσύνολον τοῦ R καὶ οὐχὶ εἰς ἕνωσιν ὑποσυνόλων τοῦ R. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἕνωσιν ὑποσυνόλων τοῦ R, θὰ ἐξετάζωμεν τὴν μονοτονίαν τῆς f εἰς ἀνὰ ἕνα ὑποσύνολον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ f(x) = σφx καὶ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς τὸ $\mathcal{D}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, \pi) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Νὰ ἐξετασθῇ ὡς πρὸς τὴν μονοτονίαν.**

**Ἀπάντησις.** Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ f ἔχει παράγωγον τὴν $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ καὶ εἶναι προφανῶς $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Τότε ὅμως θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι f γνησίως φθίνουσα ἐν $\mathcal{D}(f)$.

Ἀλλὰ ἂν λάβωμεν $\xi_1 = -\frac{\pi}{4}$ καὶ $\xi_2 = \frac{\pi}{4}$ ἀμφότερα ἐν $\mathcal{D}(f)$ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $\xi_1 < \xi_2$ καὶ ἂν ἡ f ἦτο γνησίως φθίνουσα ἐν $\mathcal{D}(f)$ θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν: $\sigma\varphi\xi_1 > \sigma\varphi\xi_2$, δηλαδὴ $-1 > 1$, ἄτοπον. Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὸ ὅτι τὸ $\mathcal{D}(f)$ εἶναι μία ἕνωσις ὑποσυνόλων τοῦ R καὶ ὄχι ἕνα συνεχὲς ὑποσύνολον αὐτοῦ.

Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὴν f εἰς τὸ $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ θὰ λάβωμεν: f γνησίως φθίνουσα ἐν $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, εἰς τὸ $(0, \pi)$ ὁμοίως f γνησίως φθίνουσα ἐν $(0, \pi)$ καὶ εἰς τὸ $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ὁμοίως f γνησίως φθίνουσα ἐν $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f ὡρισμένην εἰς τὸ διάστημα [α, β] καὶ παραγωγίσιμον $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Ἐὰν $\xi \in (\alpha, \beta)$ (ἐσωτερ. σημεῖον), τότε:**

**α) Ἐὰν $f'(\xi) > 0$, τότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ μὲ $x \neq \xi$.**

**β) Ἐὰν $f'(\xi) < 0$, τότε ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ μὲ $x \neq \xi$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἀφοῦ ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὸ $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, θὰ ὑπάρχῃ καὶ τὸ $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi) \epsilon R$. Τοῦτο ὅμως σημαίνει, ὅτι $\forall \varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta > 0$ οὕτως, ὥστε $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$ μὲ $|x - \xi| < \delta$ νὰ ἔχωμεν:

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi) \right| < \varepsilon.$$

Ἂν λάβωμεν ὡς $\varepsilon = \dfrac{1}{2} |f'(\xi)|$, θὰ ἔχωμεν:

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi) \right| < \frac{1}{2} |f'(\xi)|$$

καὶ ἑπομένως καί:

$$-\frac{1}{2} |f'(\xi)| < \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi) < \frac{1}{2} |f'(\xi)| \Longleftrightarrow f'(\xi) - \frac{1}{2} |f'(\xi)| <$$

$$< \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} < f'(\xi) + \frac{1}{2} |f'(\xi)|$$

καὶ τοῦτο $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$ μὲ $|x - \xi| < \delta$.

Ἐὰν $f'(\xi) > 0$, τότε: $\dfrac{1}{2} f'(\xi) < \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} < \dfrac{3}{2} f'(\xi)$ (1) $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$ μὲ $|x - \xi| < \delta$ καὶ ἂν $f'(\xi) < 0$, τότε: $\dfrac{3}{2} f'(\xi) < \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} < \dfrac{1}{2} f'(\xi)$ (2) $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$ μὲ $|x - \xi| < \delta$.

Ἀπὸ τὴν (1) προφανῶς προκύπτει: $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0$ $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$ μὲ $|x - \xi| < \delta$ καὶ ἀπὸ τὴν (2) $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} < 0$ $\forall x \epsilon (\alpha, \beta)$ μὲ $|x - \xi| < \delta$.

Ὥστε $\forall x \epsilon (\xi - \delta, \xi)$ καθὼς καὶ διὰ $\forall x \epsilon (\xi, \xi + \delta)$ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $f(x) < f(\xi)$ καὶ $f(x) > f(\xi)$ καὶ ἡ f γνησ. αὔξ. ἐν $\pi(\xi, \delta) - \{\xi\}$, ἂν $f'(\xi) > 0$.

Ἐπίσης $\forall x \epsilon (\xi - \delta, \xi)$ καθὼς καὶ $\forall x \epsilon (\xi, \xi + \delta)$ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $f(x) > f(\xi)$ καὶ $f(x) < f(\xi)$ καὶ ἡ f γνησ. φθίν. ἐν $\pi(\xi, \delta) - \{\xi\}$, ἂν $f'(\xi) < 0$.

**Παρατήρησις 1.** Τὰ ἀνωτέρω χαρακτηρίζουν τὴν συμπεριφορὰν τῆς f εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Πολλάκις λέγομεν διὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι ἡ συνάρτησις f «ἀνέρχεται» εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi$ ἂν $f'(\xi) > 0$ καὶ «κατέρχεται» εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi$ ἂν $f'(\xi) < 0$. Ἔχομεν δηλαδή:

Ἡ f ἀνέρχεται εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi$ ἂν $f(x) < f(\xi)$ $\forall x \in (\xi - \delta, \xi)$ και $\forall x \in (\xi, \xi+\delta)$ $(\delta > 0)$.

Ἡ f κατέρχεται εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi$ ἂν $f(x) > f(\xi)$ $\forall x \in (\xi - \delta, \xi)$ καὶ $\forall x \in (\xi, \xi+\delta)$.

**Παρατήρησις 2.** Τὸ σημεῖον ξ καλεῖται σημεῖον στασιμότητος τῆς συναρτήσεως ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $f'(\xi) = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Μελετήσατε ὡς πρὸς τὸ μονότονον τὰς ἀκολούθους βασικὰς συναρτήσεις ποὺ μᾶς εἶναι γνωσταὶ ἀπὸ τὸν τόμον «Ἄλγεβρα $A_1$».**

**α)** $f(x) = \alpha x+\beta \,|\, \alpha, \beta \in R$

**β)** $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in R,\ \alpha \neq 0$

**γ)** $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \,|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R,\ \gamma \neq 0,\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$

**Ἀπάντησις.** α) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ $f'(x) = \alpha$, ὁπότε:

1) $\alpha > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow$ f γνησίως αὔξουσα $\forall x \in R$

2) $\alpha < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα $\forall x \in R$

3) $\alpha = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow$ f σταθερὰ $\forall x \in R$

β) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ $f'(x) = 2\alpha x+\beta$, ὁπότε: 1) $\alpha > 0$ καὶ $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow 2\alpha x+\beta > 0 \Longleftrightarrow x > -\dfrac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow$ f γνησίως αὔξουσα ἐν $\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ καὶ ἂν $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < -\dfrac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα ἐν $\left(-\infty, -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$.

2) $\alpha < 0$ καὶ $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < -\dfrac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow$ f γνησίως αὔξουσα ἐν $\left(-\infty, -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$ καὶ ἂν $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x > -\dfrac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα ἐν $\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

3) Ἐπειδὴ $f'\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = 0$, τὸ σημεῖον $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι σημεῖον στασιμότητος τῆς f.

γ) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R - \left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$ καὶ ἐπειδὴ: $f(x) = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{c}{x+\dfrac{\delta}{\gamma}}$, ὅπου $c = -\dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \neq 0$, θὰ ἔχωμεν: $f'(x) = \dfrac{-c}{\left(x+\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^2}$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Θὰ μελετήσωμεν (παρατήρ. 3 § 12.21) αὐτὴν εἰς ἀνὰ ἓν ὑποσύνολον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, ἤτοι εἰς τὰ ὑποσύνολα $\left(-\infty, -\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$ καὶ $\left(-\dfrac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$ ἀφοῦ $\mathcal{D}(f) = \left(-\infty, -\dfrac{\delta}{\gamma}\right) \cup \left(-\dfrac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$.

1) Ἐὰν $c>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ f γνησ. φθίν. ἐν $\left(-\infty, -\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$ καὶ f γνησ. φθίν. ἐν $\left(-\dfrac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$

2) Ἐὰν $c<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ f γνησ. αὔξ. ἐν $\left(-\infty, -\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$ καὶ f γνησ. αὔξ. ἐν $\left(-\dfrac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Μελετήσατε τὰς ἀκολούθους συναρτήσεις ὡς πρὸς τὸ μονότονον αὐτῶν.**

α) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$, β) $f(x) = \sqrt{x^2+2} - 3|x|$

**Ἀπάντησις.** α) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ $f'(x) = 12x^3 - 10x \ \forall x \in R$. Εἶναι $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 12x^3 - 10x > 0 \Longleftrightarrow x(6x^2 - 5) > 0 \Longleftrightarrow x\left(x - \sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{6}}\right) > 0.$$

| $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ | | $0$ | | $+\sqrt{\frac{5}{6}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

Ἄρα $f'(x) > 0 \ \forall x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty\right)$ καὶ ἑπομένως εἶναι f γνησίως φθίνουσα εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty\right)$ καὶ προφανῶς $f'(x) < 0 \ \forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ καὶ ἑπομένως f γνησίως φθίνουσα εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$, $\left(0, \sqrt{\frac{5}{6}}\right)$.

Τὰ σημεῖα $0, -\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}$ εἶναι σημεῖα στασιμότητος.

β) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ εἶναι:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} - 3 & \text{ἂν } x > 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} + 3 & \text{ἂν } x < 0 \end{cases}$$

καὶ διὰ $x = 0$ δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f.

Εἶναι $f'(x) > 0 \ \forall x \in R^-$ καὶ $f'(x) < 0 \ \forall x \in R^+$ καὶ ἑπομένως f γνησίως αὔξουσα ἐν $(-\infty, 0)$ καὶ f γνησίως φθίνουσα ἐν $(0, +\infty)$. Σημεῖα στασιμότητος δὲν ὑπάρχουν.

## 12.22 Τὰ κριτήρια μονοτονίας ὡς μέθοδος διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀνισοτικῶν σχέσεων

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἐὰν $\alpha, \beta \in R$ δείξατε ὅτι:**

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}$$ **(Πολυτεχν.)**

**Ἀπάντησις.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον:

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{D}(f) = R^+ \cup \{0\}.$$

Ἐπειδὴ $f'(x) = \dfrac{x'(1+x) - x(1+x)'}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$ καὶ ἐπειδὴ $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$, ἕπεται ὅτι ἡ f γνησίως αὔξουσα ἐν $\mathcal{D}(f)$.

Τότε όμως άν $\alpha, \beta \in R$ θά είναι: $0 \leq |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ καί έπομένως καί $f(0) \leq$ $\leq f(|\alpha+\beta|) \leq f(|\alpha|+|\beta|)$, ήτοι:

$$0 \leq \frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leq \frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|} = \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|+|\beta|} + \frac{|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Δείξατε ότι:** $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ $\forall x \in R^+$.

**'Απόδειξις.** Θεωρούμεν τήν συνάρτησιν f μέ $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ μέ $\mathcal{D}(f) = R^+$.
'Η παράγωγος αύτής είναι: $f'(x) = e^x - 1 - x$ $\forall x \in R^+$. 'Αλλά γνωρίζομεν, ότι $e^x \geq 1+x$ $\forall x \in R$, όπου ή ίσότης λαμβάνει χώραν μόνον διά $x = 0$. (Κατωτέρω βλέπε καί άλλους τρόπους άποδείξεως τής $e^x \geq 1+x$ $\forall x \in R$).

Κατόπιν τούτων ή f γνησίως αύξουσα έν $\mathcal{D}(f)$ καί έπομένως άν $x>0$ θά είναι καί $f(x) > f(0) \iff e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} > 0$, ήτοι $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ $\forall x \in R^+$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Δείξατε ότι:** $1 - \dfrac{1}{x} \leq \log x$ $\forall x \in R^+$.

**'Απόδειξις.** 'Επειδή $\mathcal{D}(f) = R^+$ άρκεί νά δειχθή ή $x - 1 \leq x\log x \iff x\log x - x+1 \geq 0$. 'Εάν $f(x) = x\log x - x+1$, τότε $f'(x) = \log x$ $\forall x \in R^+$.

Είναι $f'(x)>0 \iff \log x > 0 \iff \log x > \log 1 \iff x>1$ καί συνεπώς ή f γνησίως αύξουσα έν $(1, +\infty)$ καί άρα $f(x) > f(1)$ $\forall x \in (1, +\infty)$, ήτοι $x\log x - x+1>0 \iff$ $\iff x\log x > x - 1 \iff \log x > 1 - \dfrac{1}{x}$.

'Επίσης είναι $f'(x) < 0 \iff 0 < x < 1$ καί έπομένως ή f γνησίως φθίνουσα έν $(0, 1)$ άρα άν $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \iff x\log x - x+1>0 \iff \log x>1 - \dfrac{1}{x}$. 'Αν $x = 1$, τότε $f'(1) = 0$, καί έχομεν ίσότητα. (Τό $x = 1$ σημείον στασιμότητος τής f).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. 'Εάν $0 \leq \rho \leq 1$ καί $\alpha, \beta \in R^+$, δείξατε ότι:**

$$(\alpha+\beta)^\rho \leq \alpha^\rho+\beta^\rho \qquad (1)$$

**καί άκολούθως ότι:** $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta} \leq \sqrt[\nu]{\alpha} + \sqrt[\nu]{\beta}$ $\forall \nu \geq 1$.

**'Απόδειξις.** 'Επειδή $\beta > 0$, θά έχωμεν: $(1) \iff \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + 1\right)^\rho \leq \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\rho + 1$ καί άν $\dfrac{\alpha}{\beta} = x$, τότε: $(x+1)^\rho \leq x^\rho+1$ μέ $x \in R^+$. Θεωρούμεν τώρα τήν συνάρτησιν f μέ $f(x) = x^\rho+1 - (x+1)^\rho$ καί $\mathcal{D}(f) = R^+$.

'Η παράγωγος αύτής είναι: $f'(x) = \rho x^{\rho-1} - \rho(x+1)^{\rho-1} = \rho(x^{\rho-1} - (x+1)^{\rho-1})$ καί έπειδή $x > 0$ θά είναι $x^{\rho-1} > (x+1)^{\rho-1}$, άφού $x < x+1$ καί $\rho - 1 < 0$ έξ ύποθέσεως. Ώστε διά $\rho > 0$ καί $\rho - 1 < 0$ θά είναι $f'(x) > 0$ $\forall x \in R^+$ καί έπομένως f γνησίως αύξουσα έν $R^+$. 'Επειδή δέ $(f0) = 0$ θά έχωμεν: $f(x) > f(0)$ $\forall x \in R^+$, ήτοι: $x^\rho+1 < (1+x)^\rho$. Προφανώς διά $\rho = 0$ καί $\rho = 1$ έχομεν τήν ίσότητα. Ώστε ίσχύει πάντοτε $(\alpha+\beta)^\rho \leq$ $\leq \alpha^\rho + \beta^\rho$, όπου ή ίσότης λαμβάνει χώραν μόνον όταν $\rho = 0$ ή $\rho = 1$ καί $\alpha, \beta \in R^+$.
'Εάν τώρα $\nu \geq 1$, τότε $0 < \dfrac{1}{\nu} \leq 1$ καί άρα $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta} \leq \sqrt[\nu]{\alpha} + \sqrt[\nu]{\beta}$ $(\alpha, \beta \in R^+)$.

## 12. 23 Ἀκρότατα μιᾶς συναρτήσεως (μέγιστον - ἐλάχιστον) καὶ μέθοδοι εὑρέσεως αὐτῶν

Περὶ τῶν ἀκροτάτων (μεγίστου καὶ ἐλαχίστου) μιᾶς συναρτήσεως f ἔχομεν ὁμιλήσει καὶ ἄλλοτε. Κρίνομεν σκόπιμον νὰ ἐπαναλάβωμεν μερικὰ στοιχεῖα ἀπαραίτητα διὰ τὴν μελέτην μας.

**Ὁρισμὸς 1.** *Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις f ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα Δ, παρουσιάζει εἰς τὴν θέσιν* $\xi \epsilon \Delta$ *ἕνα τοπικὸν μέγιστον, ἀντιστοίχως ἕνα τοπικὸν ἐλάχιστον, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ὑπάρχῃ ἀνοικτὸν διάστημα* $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ *ὑποσύνολον τοῦ Δ οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύῃ* $f(x) \leqq f(\xi)$, *ἀντιστοίχως* $f(x) \geqq f(\xi)$ $\forall x \epsilon (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$.

Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς f(ξ) καλεῖται τότε τοπικὸν μέγιστον, ἀντιστοίχως τοπικὸν ἐλάχιστον, τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$.

Τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον (ἐννοοῦμεν πάντοτε τοπικὰ) καλοῦνται ἁπλῶς (τοπικὰ) ἀκρότατα τῆς f ἐν Δ.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ διαστήματος [α, β], τότε, ὡς γνωστόν, ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν συνεχῶν συναρτήσεων, ὑπάρχουν δύο σημεῖα $\xi_\varepsilon$ καὶ $\xi_\mu$ ἀνήκοντα εἰς τὸ [α, β] οὕτως, ὥστε:

$$f(\xi_\varepsilon) = \min f(x) \text{ καὶ } f(\xi_\mu) = \max f(x), \text{ μὲ } \alpha \leqq x \leqq \beta.$$

Προφανῶς: $f(\xi_\varepsilon) \leqq f(x)$ $\forall x \epsilon [\alpha, \beta]$ καὶ $f(\xi_\mu) \geqq f(x)$ $\forall x \epsilon [\alpha, \beta]$.

Ἐπειδὴ ἡ $f(\xi_\varepsilon)$ εἶναι ἡ μικροτέρα ὅλων τῶν τιμῶν τῆς f διὰ $x \epsilon [\alpha, \beta]$, τοῦτο καλεῖται ὁλικὸν ἐλάχιστον, ἐνῶ ἡ $f(\xi_\mu)$ ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν τιμῶν τῆς f διὰ $x \epsilon [\alpha, \beta]$ καλεῖται ὁλικὸν μέγιστον.

Σχετικῶς μὲ τὰς παραγωγισίμους συναρτήσεις ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν τοῦ Fermat.

## 12. 24 Πρότασις Fermat

**Ἐὰν μία συνάρτησις f, ὡρισμένη ἐπὶ ἑνὸς διαστήματος Δ, παρουσιάζῃ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$, ὅπου ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ, τοπικὸν ἀκρότατον καὶ ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος $f'(\xi)$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$, τότε $f'(\xi) = 0$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ f παρουσιάζει εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ (ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ) ἕνα τοπικὸν μέγιστον καὶ ἀκόμη ὅτι ὑπάρχει ἡ $f'(\xi)$. Ἀφοῦ ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ θὰ ὑπάρχουν καὶ αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι αὐτῆς καὶ θὰ εἶναι ἴσαι.

Θεωροῦμεν ἕνα ἀνοικτὸν διάστημα $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ περιέχον τὸ ξ. Ἀφοῦ ὑπάρχει τὸ $f'(\xi)$ καὶ ὑπετέθη, ὅτι εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ ἔχομεν τοπικὸν μέγιστον, καὶ τὸ ξ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ, θὰ εἶναι:

$$f(x) \leqq f(\xi) \quad \forall x \epsilon (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

καὶ ἑπομένως, ἂν $\xi < x < \xi + \varepsilon$, θὰ εἶναι: $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqq 0$ καὶ ἂν $\xi - \varepsilon < x < \xi$, θὰ εἶναι: $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqq 0$.

Καὶ μεταβαίνοντες εἰς τὰ ὅρια θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x \to \xi + 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqq 0 \Rightarrow f'(\xi + 0) \leqq 0$$

καὶ

$$\lim_{x \to \xi - 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqq 0 \Rightarrow f'(\xi - 0) \geqq 0.$$

Ἀλλὰ αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι καὶ πρὸς τὴν $f'(\xi)$. Ὥστε ἀναγκαίως: $f'(\xi) = 0$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις ἂν ἔχωμεν θέσιν τοπικοῦ ἐλαχίστου.

**Παρατήρησις 1.** Κατ' ἀρχὴν ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἕνα ὁλικὸν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον εἶναι καὶ τοπικὸν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἐνῶ ἕνα τοπικὸν τοιοῦτον δὲν εἶναι πάντοτε καὶ ὁλικόν.

**Παρατήρησις 2.** Κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς πρέπει νὰ προσέχωμεν ὅταν ἐφαρμόζωμεν τὴν πρότασιν Fermat, διότι **ὁ μηδενισμὸς τῆς παραγώγου εἰς ἕνα σημεῖον $\xi \in \Delta$ (ἐσωτερικὸν) δὲν σημαίνει ἀναγκαίως** ὅτι **τὸ $\xi$ εἶναι θέσις ἀκροτάτου.**

Αὐτὸ σημαίνει, ὅτι ἡ συνθήκη $f'(\xi) = 0$ δὲν εἶναι καὶ ἱκανὴ διὰ τὴν ὕπαρξιν ἀκροτάτου εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \Delta$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x^3$ καὶ προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R$. Ὑπάρχει ἡ $f'(0) = 0$, καὶ ὅμως δὲν εἶναι θέσις ἀκροτάτου.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $f'(x) = 3x^2$ $\forall x \in R$ καὶ τότε $f'(0) = 0$. Εἰς τὴν θέσιν ὅμως $x = 0$ ἡ συνάρτησις δὲν παρουσιάζει ἀκρότατον, ἀφοῦ ἂν $x_1 < x_2$ μὲ $x_1, x_2 \in R$, θὰ εἶναι καὶ $f(x_1) < f(x_2)$ καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι γνησίως αὔξουσα.

**Παρατήρησις 3.** Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ $\xi$ δὲν εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ $\Delta$, ἀλλὰ ἄκρον ἑνὸς διαστήματος, π.χ. $[\alpha, \beta]$, τότε ἡ παράγωγος δὲν μηδενίζεται πάντοτε ἂν καὶ ὑπάρχη ἀκρότατον εἰς τὴν θέσιν αὐτήν. Οὕτως εἰς τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x$ καὶ μὲ $\Delta = [\alpha, \beta]$ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράγωγος $f'(\alpha) = 1$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ καὶ παρὰ τὸ ὅτι εἰς τὸ ἄκρον α ἔχομεν ἐλάχιστον καὶ εἰς τὸ ἄκρον β μέγιστον, ἐν τούτοις ἡ παράγωγος εἰς οὐδὲν σημεῖον τούτων εἶναι μηδέν.

**Παρατήρησις 4.** Ἀκόμη πρέπει νὰ προσέξωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιάζη εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ $\Delta$ ἀκρότατον (τοπικὸν) καὶ ἐν τούτοις οὔτε κὰν νὰ ὑπάρχη ἡ παράγωγος εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Οὕτω γνωρίζομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = |x|$ δὲν ἔχει παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0$, παρὰ ταῦτα ἔχει ἐλάχιστον καὶ μάλιστα ὁλικὸν εἰς τὴν θέσιν αὐτήν, διότι $f(x) = |x| \geqq 0 \ \forall x \in R$ καὶ $f_{min} = 0$ διὰ $x = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[5]{x^2}}$. Ὑπάρχει παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$. Ὑπάρχει ἀκρότατον εἰς τὴν θέσιν αὐτήν;**

**Ἀπόδειξις.** Πρέπει : $1 - \sqrt[5]{x^2} \geqq 0 \iff -1 \leqq x \leqq 1$ καὶ ἑπομένως : $\mathcal{D}(f) = [-1, +1]$.

Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι : $f'(x) = -\dfrac{1}{5\sqrt{1 - \sqrt[5]{x^2}} \cdot \sqrt[5]{x}}$.

Καὶ προφανῶς δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι : $\sqrt{1 - \sqrt[5]{x^2}} < 1 \ \forall x \in [-1, 1] - \{0\}$, ἕπεται ὅτι $f(x) < 1$ $\forall x \in [-1, 1] - \{0\}$, ἐνῶ διὰ $x = 0$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $f(0) = 1$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ προφανῶς μέγιστον τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

**Παρατήρησις 5.** Εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ μὴν ἔχῃ ἡ συνάρτησις f παράγωγον εἰς ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Δ καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ νὰ μὴν ἔχῃ οὔτε ἀκρότατον (τοπικόν). Οὕτως ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ μὲ $\Delta = [-1, +1]$ δὲν ἔχει παράγωγον εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi = 0$, ἐσωτερικὸν τοῦ $\Delta = [-1, +1]$, ἀφοῦ $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ \forall x \in [-1, +1] - \{0\}$, ἀλλὰ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον (τοπικὰ) ἔχει, διότι, ὡς εἶναι ἀμέσως φανερὸν εἰς τὸ $[-1, +1]$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.

## 12. 25 Μέθοδοι εὑρέσεως τῶν ἀκροτάτων (τοπικῶν) μιᾶς συναρτήσεως καὶ αἱ σχετικαὶ προτάσεις

Ἡ εὕρεσις τῶν ἀκροτάτων (τοπικῶν) μιᾶς συναρτήσεως f ἀπαιτεῖ ἐξαιρετικὴν προσοχὴν καὶ πλήρη γνῶσιν τῶν σχετικῶν προτάσεων.

Τὸ θεώρημα τοῦ Fermat μᾶς παρέχει τὸ πρῶτον βῆμα. Διότι ἂν ἡ f εἰς ἕνα διάστημα Δ ἔχῃ ἀκρότατον καὶ εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον ξ τοῦ Δ ,τότε ἡ f′ θὰ μηδενίζεται εἰς τὸ ξ. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει ὅτι θὰ πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν ἀκρότατα μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς $f'(x) = 0$ ἐν Δ.

Εἶναι φανερόν, ἀπὸ τὰ παραδείγματα τὰ ὁποῖα ἀναφέραμεν προηγουμένως, ὅτι τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα ἡ f ἔχει ἀκρότατα εἶναι :

α) Ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχει ἡ f′ καὶ γίνεται μηδέν, καὶ

β) Ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει ἡ f′.

Τὰ σημεῖα αὐτὰ λέγονται καὶ **κρίσιμα** σημεῖα τῆς f.

Ὑπενθυμίζομεν, ὅτι ἡ πρότασις τοῦ Fermat εἶναι μία ἀναγκαία συνθήκη, ὄχι ὅμως καὶ ἱκανή, δηλαδὴ ὁ μηδενισμὸς τῆς παραγώγου εἰς τὸ $\xi \in \Delta$ δὲν σημαίνει καὶ τὴν ὕπαρξιν ἀκροτάτων εἰς αὐτό.

## 12. 26 Μέθοδος πρώτη τῇ βοηθείᾳ τῆς πρώτης παραγώγου

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς πρώτης μεθόδου στηρίζεται εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f συνεχῆ εἰς ἕνα διάστημα Δ καὶ παραγωγίσιμον εἰς κάθε σημεῖον τοῦ διαστήματος τούτου καὶ σημεῖον $\xi \in \Delta$ εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἢ ὄχι ἡ παράγωγος τῆς f, τότε ἰσχύουν:**

**α)** $f'(x) > 0 \ \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi)$ **καὶ** $f'(x) < 0 \ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) \Rightarrow f(\xi) = \max f$

**β)** $f'(x) < 0 \ \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi)$ **καὶ** $f'(x) > 0 \ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) \Rightarrow f(\xi) = \min f.$

**Ἀπόδειξις τοῦ (α).** Ἔστω $f'(x) > 0 \ \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ $f'(x) < 0 \ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) \Rightarrow f(\xi) = \max f$.

Ἀφοῦ $f'(x) > 0 \ \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ $f'(x) < 0 \ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) \Rightarrow$ f γνησίως αὔξουσα ἐν $(\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ f γνησίως φθίνουσα ἐν $(\xi, \xi + \varepsilon)$ καὶ ἐπομένως, $f(x) < f(\xi) \ \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ $f(x) < f(\xi) \ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon)$, ἤτοι $f(x) < f(\xi)$ $\forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi) \cup (\xi, \xi + \varepsilon)$. Ἀλλὰ ἡ f εἶναι συνεχὴς $\forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ καὶ ἐπομένως λαμβάνει κάθε τιμὴν μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε τιμῶν αὐτῆς συνεπῶς $f(x) \leqq f(\xi) \ \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ καὶ ἄρα $f(\xi) = \max f$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ τοῦ (β).

Κατόπιν τῶν προηγουμένων ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς πορείαν διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ἀκρότατα μιᾶς συνεχοῦς καὶ παραγωγισίμου συναρτήσεως f.

**Πρῶτον.** Εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον f′ τῆς f.

**Δεύτερον.** Εὑρίσκομεν τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $f' = 0$ καθὼς καὶ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος.

Δηλαδὴ εὑρίσκομεν ἐν συντομίᾳ τὰς κρισίμους τιμὰς τῆς f ἐν Δ.

**Τρίτον.** Μελετῶμεν τὸ πρόσημον τῆς f′ διὰ τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἑκατέρωθεν ἑνὸς κρισίμου σημείου. Ἐὰν ἡ f′ ἔχῃ σταθερὸν πρόσημον ἑκατέρωθεν τοῦ κρισίμου σημείου, τότε ἡ f δὲν παρουσιάζει ἀκρότατον εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ κρισίμου σημείου. Ἐὰν ὅμως ἀριστερὰ αὐτοῦ εἶναι θετικὴ καὶ δεξιὰ αὐτοῦ ἀρνητική, ὑπάρχει εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ κρισίμου σημείου τοπικὸν μέγιστον. Ἐνῶ ἂν ἀριστερὰ αὐτοῦ εἶναι

ἀρνητικὴ καὶ δεξιὰ θετική, τότε εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον.

**Τέταρτον.** Εὑρίσκομεν τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον ὑπολογίζοντες τὴν (ἀριθμητικὴν) τιμὴν τῆς f, θέτοντες ὅπου x τὴν ἐν λόγῳ κρίσιμον τιμήν.

**Παρατήρησις 1.** Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς $f' = 0$ εἶναι μιγαδικαί, δὲν ἔχομεν ἀκρότατα.

**Παρατήρησις 2.** Συνήθως καταστρώνομεν καὶ σχετικὸν πίνακα.

**Παρατήρησις 3.** Ἡ μέθοδος λέγεται καὶ πρῶτον κριτήριον εὑρέσεως ἀκροτάτων τῆς f.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Εὕρετε τὰ ἀκρότατα τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων (βασικῶν):**

α) $f(x) = \alpha x + \beta / \alpha, \beta \in R, \alpha \neq 0$

β) $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma / \alpha, \beta, \gamma \in R, \alpha \neq 0$

γ) $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma / \alpha, \beta, \gamma \in R, \alpha \neq 0$

δ) $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} / \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R, \gamma \neq 0, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

**Ἀπάντησις. α)** Ἔχομεν $\mathscr{D}(f) = R$ καὶ $f'(x) = \alpha$ καὶ ἄρα δὲν ὑπάρχει ρίζα ἐν R τῆς $f'(x) = 0$, ἑπομένως ἡ f στερεῖται ἀκροτάτων.

Εἶναι δέ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right) =$$

$$= (+\infty).\alpha = \begin{cases} \to +\infty \text{ ἂν } \alpha > 0 \\ \to -\infty \text{ ἂν } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)\alpha = \begin{cases} \to -\infty \text{ ἂν } \alpha > 0 \\ \to +\infty \text{ ἂν } \alpha < 0 \end{cases}$$

β) Εἶναι $\mathscr{D}(f) = R$ καὶ $f'(x) = 2\alpha x + \beta$.

Αἱ ρίζαι τῆς $f'(x) = 0$ εἶναι: $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐξετάζομεν τὸ πρόσημον τῆς f′ ἑκατέρωθεν τοῦ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐὰν $\alpha > 0$, τότε $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ διὰ } x > -\dfrac{\beta}{2\alpha} \\ f'(x) < 0 \text{ διὰ } x < -\dfrac{\beta}{2\alpha} \end{cases}$, ἄρα τὸ $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = \min f$, ἤτοι:

$$\min f = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \text{ διὰ } \alpha > 0 \text{ καὶ } x = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Ἐὰν $\alpha < 0$ τότε: $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ διὰ } x < -\dfrac{\beta}{2\alpha} \\ f'(x) < 0 \text{ διὰ } x > -\dfrac{\beta}{2\alpha} \end{cases}$, ἄρα τὸ $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = \max f$, ἤτοι:

$$\max f = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \text{ διὰ } \alpha < 0 \text{ καὶ } x = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Ἐπειδὴ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (\sigma\eta\mu\alpha) \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \begin{cases} \to +\infty & \text{ἂν } \alpha > 0 \\ \to -\infty & \text{ἂν } \alpha < 0 \end{cases}$

καὶ ὁμοίως $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \to +\infty & \text{ἂν } \alpha > 0 \\ \to -\infty & \text{ἂν } \alpha < 0 \end{cases}$

Τὸ εὑρεθὲν ἀκρότατον εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων $\alpha > 0$ καὶ $\alpha < 0$ εἶναι ἀπόλυτον.

γ) Εἶναι $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ $f'(x) = 4\alpha x^3 + 2\beta x$.

Αἱ ρίζαι τῆς $f'(x) = 0$ εἶναι: $x_1 = 0$ καὶ $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\dfrac{\beta}{2\alpha}}$ ἐὰν $-\dfrac{\beta}{2\alpha} \geqq 0$.

Ἐὰν $-\dfrac{\beta}{2\alpha} < 0$ δὲν ὑπάρχει ἄλλη ρίζα πραγματικὴ ἐκτὸς τῆς $x = 0$.

Ἑπομένως ἔχομεν:

1) Ἐὰν $\alpha, \beta \in R^+$ μία μόνον ρίζα, ἡ $x = 0$

2) Ἐὰν $\alpha, \beta \in R^-$ μία μόνον ρίζα ἡ $x = 0$

3) Ἐὰν $\alpha\beta < 0$ τρεῖς ρίζαι αἱ $x = 0$ καὶ $x = \pm\sqrt{-\dfrac{\beta}{2\alpha}}$

4) Ἐὰν $\beta = 0$ μία μόνον ρίζα ἡ $x = 0$ (τριπλῆ).

Μελετῶμεν τώρα τὸ πρόσημον τῆς $f'$ ἑκατέρωθεν τῶν ριζῶν της διὰ νὰ καθορίσωμεν τὸ εἶδος ἀκροτάτων.

Ταῦτα συμπεραίνομεν ἀμέσως ἐκ τῶν ἀκολούθων πινάκων.

| 1 | x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha > 0$, $\beta > 0$ | $f'$ | | − | 0 | + | |
| | f | $+\infty$ | ↘ | $f(0) = \gamma$ ὁλ. ἐλαχ. | ↗ | $+\infty$ |

| 2 | x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha < 0$, $\beta < 0$ | $f'$ | | + | 0 | − | |
| | f | $-\infty$ | ↗ | ὁλ. μεγ $f(0) = \gamma$ | ↘ | $-\infty$ |

| 3 | x | $-\infty$ | | $-\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ | | $0$ | | $\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha>0$ $\beta>0$ | f′ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | f | $+\infty$ | ↘ | $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπ. ἐλαχ. | ↗ | $\gamma$ τοπ. μεγ. | ↘ | $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπ. ἐλαχ. | ↗ | $+\infty$ |

| 4 | x | $-\infty$ | | $-\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ | | $0$ | | $\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha<0$ $\beta<0$ | f′ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| | f | $-\infty$ | ↗ | τοπ. μεγ. $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ | ↘ | $\gamma$ τοπ. ἐλαχ. | ↗ | τοπ. μεγ. $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ | ↘ | $-\infty$ |

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \to +\infty & \text{ἂν } \alpha>0 \\ \to -\infty & \text{ἂν } \alpha<0 \end{cases}$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας αὐτοὺς συμπεραίνομεν:

1) Ἐὰν $\alpha, \beta \in R^+$ ὑπάρχει ὁλικὸν ἐλάχιστον τὸ $\gamma$ διὰ $x = 0$.

2) Ἐὰν $\alpha, \beta \in R^-$ ὑπάρχει ὁλικὸν μέγιστον τὸ $\gamma$ διὰ $x = 0$.

3) Ἐὰν $\alpha > 0$, $\beta < 0$ ὑπάρχουν τοπικὰ ἀκρότατα τά: $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ τοπικὸν ἐλάχιστον διὰ $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ καὶ $\gamma$ τοπικὸν μέγιστον διὰ $x = 0$.

4) Ἐὰν $\alpha < 0$ καὶ $\beta > 0$ ὑπάρχουν τοπικὰ ἀκρότατα τά: $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ τοπικὸν μέγιστον διὰ $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ καὶ $\gamma$ τοπικὸν ἐλάχιστον διὰ $x = 0$.

5) Ἐὰν $\beta = 0$ καὶ $\alpha > 0$ προφανῶς ὑπάρχει ὁλικὸν ἐλάχιστον τὸ $\gamma$ διὰ $x = 0$ καὶ ἂν $\alpha < 0$ ὁλικὸν μέγιστον τὸ $\gamma$ διὰ $x = 0$ [Πίνακες (1), (2)].

δ) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R - \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}$. Ἡ $f'(x) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2} \neq 0$ καὶ ἑπομένως ἡ f δὲν ἔχει ἀκρότατα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκρότατα τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ β) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + 3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$

γ) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{ἂν } x \leq 1 \\ 3-x & \text{ἂν } x > 1 \end{cases}$ δ) $f(x) = \frac{e^x}{x^\nu}$ μὲ $x \in (0, +\infty)/\nu \in N$.

**Ἀπάντησις. α)** Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R$. Ἡ παράγωγος εἶναι:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + (x-2)\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2x-4}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Αἱ ρίζαι τῆς $f'(x) = 0$ εἶναι $x = \frac{4}{5}$ καὶ τὸ σημεῖον $x = 0$ σημεῖον ἀσυνεχείας τῆς πρώτης παραγώγου (δὲν ὑπάρχει ἡ $f'(x)$].

Ὥστε κρίσιμα σημεῖα εἶναι τά: $x = \frac{4}{5}$ καὶ $x = 0$.

Ἐξετάζομεν τὸ πρόσημον τῆς $f'$ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου $x = \frac{4}{5}$.

Ἔχομεν: $f'(x) > 0$ διὰ $x > \frac{4}{5}$ καὶ $f'(x) < 0$ διὰ $0 < x < \frac{4}{5}$. Κατόπιν τούτου εἰς τὴν θέσιν $x = \frac{4}{5}$ ὑπάρχει ἕνα τοπικὸν ἐλάχιστον τό:

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5} - 2\right)\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}.$$

Ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν θέσιν $x = 0$ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x < 0$ ἔχομεν $f'(x) > 0$ καὶ διὰ $x > 0$, ἀλλὰ $x < \frac{4}{5}$ ἔχομεν $f'(x) < 0$ δηλαδὴ εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ ἔχομεν ἕνα τοπικὸν μέγιστον. Τὸ μέγιστον εἶναι τὸ $f(0) = 0$.

Προφανῶς ἡ f εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$ καὶ εἶναι ἀμέσως φανερὸν ὅτι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Εἶναι εὔκολον νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς.

**β)** Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R$. Διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τοῦ λογισμοῦ θέτομεν $\frac{x}{6} = \varphi$ καὶ λαμβάνομεν: $\sigma(\varphi) = 2\sigma\upsilon\nu 3\varphi + 3\sigma\upsilon\nu 2\varphi$.

Ἐπειδὴ ἡ σ εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδο $2\pi$ θὰ τὴν ἐξετάσωμεν εἰς ἕνα διάστημα μιᾶς περιόδου $[-\pi, \pi]$.

Διὰ τὴν συνάρτησιν λοιπὸν σ μὲ $\sigma(\varphi) = 2\sigma\upsilon\nu 3\varphi + 3\sigma\upsilon\nu 2\varphi$ καὶ $\mathscr{D}(\sigma) = [-\pi, \pi]$ ἔχομεν τὰ ἀκόλουθα:

**α)** Ἡ σ εἶναι παντοῦ συνεχὴς ἐν $\mathscr{D}(\sigma)$

**β)** $\sigma(-\pi) = \sigma(\pi) = 1$

Εὑρίσκομεν τὴν σ′ ἡ ὁποία εἶναι:

$$\sigma'(\varphi) = -6\eta\mu 3\varphi - 6\eta\mu 2\varphi = -12\eta\mu\frac{5\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}.$$

Αἱ ρίζαι τῆς $\sigma'(\varphi) = 0$ εἶναι μόνον αἱ ρίζαι τῆς $\eta\mu\frac{5\varphi}{2} = 0$, ἀφοῦ εἰς τὸ ἀνοικτὸν

διάστημα $(-\pi, \pi)$ εἶναι πάντοτε $\text{συν}\frac{\varphi}{2} \neq 0$. Αἱ ρίζαι τῆς $\eta\mu\frac{5\varphi}{2} = 0$ εἰς τὸ ἀνοικτον διάστημα $(-\pi, \pi)$ εἶναι αἱ: $\varphi_1 = -\frac{4\pi}{3}$, $\varphi_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = \frac{2\pi}{3}$ καὶ $\varphi_5 = \frac{4\pi}{3}$

(('Αφοῦ $\frac{5\varphi}{2} = \mu\pi \Longleftrightarrow \varphi = \frac{2\mu\pi}{5}$ καὶ $-\pi < \frac{2\mu\pi}{5} < \pi$ διὰ $\mu = -2, -1, 0, 1, 2$).)

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω καὶ διὰ νὰ καθορίσωμεν τὸ πρόσημον τῆς σ΄ ἑκατέρωθεν ἑκάστης τῶν ριζῶν της καταστρώνομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

| φ | $-\pi$ | | $-\frac{4\pi}{5}$ | | $-\frac{2\pi}{5}$ | | $0$ | | $\frac{2\pi}{5}$ | | $\frac{4\pi}{5}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| σ΄ | | + | 0 | — | 0 | + | 0 | — | 0 | + | 0 | — | |
| σ | 1 | ↗ | $5\text{συν}\frac{2\pi}{5}$ | ↘ | $-5\text{συν}\frac{\pi}{5}$ | ↗ | 5 | ↘ | $-5\text{συν}\frac{\pi}{5}$ | ↗ | $5\text{συν}\frac{2\pi}{5}$ | ↘ | 1 |

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ἔχομεν τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα:

1) Διὰ $\varphi = \pm\pi + 2k\pi \mid k\in Z$ ἔχομεν **τοπικὸν** ἐλάχιστον τὸ 1, ἤτοι διὰ $x = 12k\pi \pm \pi$.

2) Διὰ $\varphi = \pm\frac{4\pi}{5} + 2k\pi \mid k\in Z$ ἔχομεν **τοπικὸν** μέγιστον τὸ $5\text{συν}\frac{2\pi}{5} = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ἤτοι διὰ $x = 12k\pi \pm \frac{24\pi}{5}$.

3) Διὰ $\varphi = \pm\frac{2\pi}{5} + 2k\pi \mid k\in Z$ ἔχομεν **ὁλικὸν** ἐλάχιστον τὸ $-5\text{συν}\frac{\pi}{5} = -5\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (ἀφοῦ $-5\text{συν}\frac{\pi}{5} < 1$), ἤτοι διὰ $x = 12k\pi \pm \frac{12\pi}{5}$.

4) Διὰ $\varphi = 0 + 2k\pi \mid k\in Z$ ἔχομεν **ὁλικὸν** μέγιστον τὸ 5, ἤτοι διὰ $x = 12k\pi$.

γ) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{ἂν } x < 1 \\ -1 & \text{ἂν } x > 1 \end{cases}$$

καὶ ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 1$ ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν ὑπάρχει, διότι

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1-0} 2(x+1) = 4,$$

ἐνῶ
$$\lim_{x\to 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{3 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1 - x}{x - 1} = -1.$$

Ὥστε θὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὶ συμβαίνει εἰς τὰ κρίσιμα σημεῖα, δηλαδὴ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα $f'(x) = 0$ καὶ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει ἡ f΄. Αὐτὰ εἶναι τὰ $x = 0$ καὶ $x = 1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $0 < x < 1$ εἶναι $f'(x) > 0$ καὶ διὰ $x < 0$ εἶναι $f'(x) < 0$ καὶ ἑπομένως διὰ $x = 0$ παρουσιάζει **τοπικὸν** ἐλάχιστον τὸ $f(0) = 0$. Διὰ $x = 1$ θὰ ἔχωμεν ἕνα τοπικὸν μέγιστον, διότι διὰ $0 < x < 1$ εἶναι $f'(x) > 0$ καὶ διὰ $x > 1$ εἶναι $f'(x) < 0$. Τὸ μέγιστον εἶναι τὸ $f(1) = 2$.

δ) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$. Ἐπειδὴ $f'(x) = \frac{e^x x^\nu - \nu e^x x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = \frac{e^x x^{\nu-1}(x - \nu)}{x^{2\nu}} =$

$= \frac{e^x(x-\nu)}{x^{\nu+1}}$, αἱ ρίζαι τῆς $f'(x)=0$ εἶναι $x=\nu$. Ἐπειδὴ $f'(x)>0$ διὰ $x>\nu$ καὶ $f'(x)<0$ διὰ $0<x<\nu$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἐλάχιστον διὰ $x=\nu$ καὶ εἶναι τὸ $f(\nu)=\frac{e^\nu}{\nu^\nu}$.

## 12. 27 Μέθοδος δευτέρα τῇ βοηθείᾳ τῆς δευτέρας παραγώγου ἢ καὶ δεύτερον κριτήριον προσδιορισμοῦ ἀκροτάτων

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς δευτέρας μεθόδου τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἀκροτάτων μιᾶς συναρτήσεως f στηριζόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἐὰν μία συνάρτησις f ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς ἕνα σημεῖον $\xi\in\mathcal{D}(f)$, ἔχῃ πρώτην παράγωγον $f'(x)$ καὶ δευτέραν $f''(x)$ συνεχεῖς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$ καὶ εἶναι $f'(\xi)=0$ καὶ $f''(\xi)\neq 0$, τότε ἰσχύουν:**

**α) $f''(\xi)<0 \Rightarrow f(\xi)=\max f$ (τοπικόν).**

**β) $f''(\xi)>0 \Rightarrow f(\xi)=\min f$ (τοπικόν).**

**Ἀπόδειξις τοῦ (α).** Ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως $f'(\xi)=0$. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι $f''(\xi)<0$. Ἐπειδὴ $f''$ ὑπετέθη συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x=\xi\in\mathcal{D}(f)$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει περιοχὴ $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\subset\mathcal{D}(f)$ οὕτως, ὥστε $f''(x)<0$ $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ $f''$ εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς $f'$, θὰ ἔχωμεν: $f''(x)<0$ $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon) \Rightarrow f'$ γνησίως φθίνουσα $\forall x\in[\xi-\varepsilon,\xi]$ καὶ $f'$ γνησίως φθίνουσα $\forall x\in[\xi,\xi+\varepsilon]$ καὶ ἑπομένως $f'(x)\geqq f'(\xi)=0$ $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi]$ καὶ $f'(x)\leqq f'(\xi)=0$ $\forall x\in[\xi,\xi+\varepsilon)$, ἤτοι $f'(x)\geqq 0$ $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi]$ καὶ $f'(x)\leqq 0$ $\forall x\in[\xi,\xi+\varepsilon)$.

Αὐτὰ ὅμως σημαίνουν $f\uparrow$ ἐν $(\xi-\varepsilon,\xi]$ καὶ $f\downarrow$ ἐν $[\xi,\xi+\varepsilon)$, δηλαδὴ $f(x)\leqq f(\xi)$ $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi]$ καὶ $f(x)\leqq f(\xi)$ $\forall x\in[\xi,\xi+\varepsilon)$ καὶ τελικῶς $f(x)\leqq f(\xi)$ $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$, ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ f ἔχει εἰς τὴν θέσιν $x=\xi$ τοπικὸν μέγιστον τὸ $f(\xi)$.

Ὁμοίως γίνεται καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ (β).

Ἐὰν συμβαίνῃ νὰ εἶναι $f''(\xi)=0$, τότε ἡ συνάρτησις εἰς τὸ σημεῖον ξ δύναται νὰ ἔχῃ ἀκρότατον ἢ καὶ ὄχι. Τότε διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὴν πρώτην μέθοδον.

Κατόπιν τῶν προηγουμένων ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς πορείαν πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς δευτέρας μεθόδου.

**Ἐργασία πρώτη.** Εὑρίσκομεν τὴν $f'$ καθὼς καὶ τὰς ρίζας τῆς $f'(x)=0$, ἐννοεῖται τὰς πραγματικάς. Ἂς εἶναι $\xi\in R$ μία ρίζα τῆς $f'(x)=0$.

**Ἐργασία δευτέρα.** Εὑρίσκομεν τὴν $f''$ καὶ τότε ἄν: $f''(\xi)\neq 0$ ὑπάρχει εἰς τὴν θέσιν $x=\xi$ ἀκρότατον τῆς f.

Ἐὰν $f''(\xi)>0$, τότε εἰς τὴν θέσιν $x=\xi$ ἔχομεν τοπικὸν ἐλάχιστον.

Ἐὰν $f''(\xi) < 0$, τότε εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ ἔχομεν τοπικὸν μέγιστον. Ἐὰν ὅμως $f''(\xi) = 0$, τότε ἐφαρμόζομεν τὴν προηγουμένην μέθοδον. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἰσχύει ἀκόμη τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα τὸ ὁποῖον προκύπτει δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Taylor ποὺ θὰ εἴδωμεν κατωτέρω. Τὸ λαμβάνομεν χωρὶς ἀπόδειξιν. Ἐὰν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι τῆς f μέχρι καὶ τῆς τάξεως ν καὶ εἶναι $f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(\nu-1)}(\xi) = 0$, ἐνῶ $f^{(\nu)}(\xi) \neq 0$, τότε ἂν $\nu = 2\lambda+1 \mid \lambda\in N$ ἡ f δὲν ἔχει ἀκρότατον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$, ἐνῶ ἂν $\nu = 2\lambda \mid \lambda\in N$ καὶ συγχρόνως εἶναι $f^{(\nu)}(\xi) > 0$ ἡ f ἔχει εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$, τοπικὸν ἐλάχιστον, ἐνῶ ἂν $f^{(\nu)}(\xi) < 0$ ἡ f ἔχει εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$, τοπικὸν μέγιστον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Εὕρετε τὰ ἀκρότατα τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:**

**α)** $f(x) = 2x^3 - 18x^2+48x - 14$ **δ)** $f(x) = x\log x$

**β)** $f(x) = (x - 1)^7$ **ε)** $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

**γ)** $f(x) = x^x$ **στ)** $f(x) = x^6$

**Ἀπάντησις. α)** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ συνεχὴς $\forall x\in R$.
Ἡ παράγωγος εἶναι: $f'(x) = 6x^2 - 36x+48$.
Αἱ ρίζαι τῆς $f'(x) = 0$ εἶναι: $x_1 = 2$ καὶ $x_2 = 4$.
Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = 12x - 36$.
Ἐπειδὴ $f''(2) = -12 < 0$, ἡ συνάρτησις εἰς τὴν θέσιν $x = 2$ παρουσιάζει μέγιστον, τὸ ὁποῖον εἶναι: $f(2) = 26$.
Ἐπειδὴ $f''(4) = 12 > 0$, ἡ συνάρτησις εἰς τὴν θέσιν $x = 4$ παρουσιάζει ἐλάχιστον, τὸ ὁποῖον εἶναι: $f(4) = 18$.
Ἐπειδὴ τοῦ $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$ (ἀντιστοίχως), ἕπεται ὅτι τὰ εὑρεθέντα ἀκρότατα εἶναι τοπικά.

**β)** Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ συνεχὴς $\forall x\in R$.
Ἡ παράγωγος εἶναι $f'(x) = 7(x - 1)^6$. Ρίζαι τῆς $f'(x) = 0$ μόνον ἡ $x = 1$.
Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = 42(x - 1)^5$, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $f''(1) = 0$ καὶ ἑπομένως θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν πρώτην μέθοδον.
Ἐπειδὴ ὅμως διὰ $x > 1$ εἶναι $f'(x) > 0$ καὶ διὰ $x < 1$ εἶναι καὶ πάλιν $f'(x) > 0$, ἕπεται, ὅτι ἡ f δὲν ἔχει ἀκρότατα. (Ὡς θὰ εἴδωμεν εἶναι σημεῖον καμπῆς).
Εἰς τὸ ἴδιον συμπέρασμα φθάνομεν ἂν λάβωμεν τὰς παραγώγους μέχρι καὶ τῆς $f^{(7)}$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $f(x) = c\neq0$ καὶ ἐπειδὴ ὁ 7 εἶναι περιττός, ἡ f στερεῖται ἀκροτάτων.
Ἐὰν εἴχομεν τὴν $f(x) = (x - 1)^4$, τότε $f'(x) = 4(x - 1)^3$ $f''(x) = 12(x - 1)^2$, $f'''(x) = 24(x-1)$ καὶ $f^{(4)}(x) = 24$ καὶ εἶναι: $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$, ἐνῶ $f^{(4)}(1) = 24 \neq 0$. Ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι $f^{(4)}(1) = 24 > 0$ ἔχομεν εἰς τὴν θέσιν $x = 1$ τοπικὸν ἐλάχιστον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $f(1) = 0$.

**γ)** Διὰ νὰ ὁρίζεται ἡ συνάρτησις πρέπει: $\mathcal{D}(f) = R^+$. Ὁ τύπος τῆς f γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $f(x) = e^{x\log x}$.
Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι: $f'(x) = e^{x\log x}(x\log x)' = x^x(1+\log x)$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $1+\log x = 0 \iff \log x = -1 \iff x = \dfrac{1}{e}$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = (x^x)'(1+\log x)+x^x(1+\log x)' = x^x(1+\log x)^2+$ $+x^x\cdot\frac{1}{x}$.

Ἔχομεν: $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e.\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} > 0$ καὶ ἑπομένως εἰς τὴν θέσιν $x = \frac{1}{e}$ ἡ f παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον, τὸ ὁποῖον εἶναι: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

δ) Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R^+$ καὶ συνεχὴς $\forall x \in \mathscr{D}(f)$.

Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι: $f'(x) = 1+\log x$.

Αἱ ρίζαι της εἶναι: $x = \frac{1}{e}$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι $f''(x) = \frac{1}{x}$ καὶ ἐπειδὴ $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$, ἕπεται, ὅτι ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = \frac{1}{e}$ παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

ε) Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R^+$ καὶ συνεχὴς $\forall x \in R^+$.

Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι: $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$ καὶ αἱ ρίζαι της εἶναι: $x = e$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = \frac{(1-\log x)'x^2-(x^2)'(1-\log x)}{x^4} =$

$= \frac{-x-2x+2x\log x}{x^4} = \frac{2\log x-3}{x^3}$.

Ἐπειδὴ $f''(e) = \frac{-1}{e^3} < 0$ ἕπεται ὅτι ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = e$ παρουσιάζει τοπικὸν μέγιστον τὸ ὁποῖον εἶναι: $f(e) = \frac{1}{e}$.

στ) Ἔχομεν $\mathscr{D}(f) = R$ καὶ συνεχὴς $\forall x \in R$.

Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $f'(x) = 6x^5$ μὲ ρίζαν τὴν $x = 0$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = 30x^4$ καὶ ἐπειδὴ $f''(0) = 0$ ἐφαρμόζομεν τὴν πρώτην μέθοδον. Εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x > 0$ καὶ $f'(x) < 0$ διὰ $x < 0$ καὶ ἑπομένως εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ ἡ f παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $f(0) = 0$.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἔχομεν $f''(x) = 30x^4$, $f^{(3)}(x)=120x^3$, $f^{(4)}(x)=360x^2$, $f^{(5)}(x)=720x$, $f^{(6)}(x) = 720>0$, ἄρα ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον τὸ $f(0) = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ποῖον ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων σταθερᾶς περιμέτρου 2α, ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;**

**Ἀπάντησις.** Ἐὰν x, y αἱ διαστάσεις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν: $2x+2y = 2\alpha \Longleftrightarrow x+y = \alpha$. Καὶ ἐπίσης $xy = E$.

Ἔχομεν $E = x(\alpha-x)$. Διὰ τὴν συνάρτησιν E μὲ $E(x) = x(\alpha-x)$ ἔχομεν $\mathscr{D}(f) = (0, \alpha)$. Ζητοῦμεν τὸ μέγιστον E.

Ἐπειδὴ $E'(x) = \alpha-2x$, αἱ ρίζαι τῆς $E'(x) = 0$ εἶναι: $x = \frac{\alpha}{2}$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι : $E''(x) = -2 < 0$ καὶ ἑπομένως καὶ $E''\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2 < 0$ καὶ ἡ συνάρτησις E εἰς τὴν θέσιν $x = \frac{\alpha}{2}$ παρουσιάζει μέγιστον προφανῶς ἀπόλυτον.

Τὸ μέγιστον E εἶναι τὸ $E\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{4}$ καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς διαστάσεις $x = y = \frac{\alpha}{2}$, δηλαδὴ τὸ τετράγωνον πλευρᾶς $\frac{\alpha}{2}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ποῖον ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων σταθερᾶς περιμέτρου 2τ ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;**

**Ἀπάντησις.** Ἔστωσαν x, y, z τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μὲ $x+y+z = 2\tau$. Θεωροῦμεν κατ' ἀρχὴν τὸ $z = c$ σταθερὸν καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν μὲ $x+y = 2\tau - c$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι :

$$E = \sqrt{\tau(\tau - x)(\tau - y)(\tau - c)}$$

καὶ ἐπειδὴ $y = 2\tau - c - x$ θὰ ἔχωμεν :

$$E = \sqrt{\tau(\tau - x)(c+x-\tau)(\tau - c)} =$$

$$= \sqrt{\tau(\tau - c)}\cdot\sqrt{(\tau - x)(c+x-\tau)} = \lambda\sqrt{(\tau - x)(c+x-\tau)} \quad [\lambda = \sqrt{\tau(\tau - c)} = \text{σταθ.}].$$

Θεωροῦμεν τώρα τὴν συνάρτησιν $\varphi(x) = (\tau - x)(c+x-\tau)$.

Ἐὰν εὑρεθῇ τὸ maxφ, τότε εὑρέθη ἀντιστοίχως καὶ τὸ maxE, ἀφοῦ $E = \varphi^2(x)\cdot\lambda^2$.

Ἡ συνάρτησις $\varphi(x) = (\tau - x)(c+x-\tau)$ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ $\mathscr{D}(\varphi) = (0, \tau)$.

Ἡ παράγωγος εἶναι : $\varphi'(x) = -(c+x-\tau)+(\tau - x) = 2\tau - c - 2x$.

Αἱ ρίζαι της εἶναι : $x = \frac{2\tau - c}{2}$

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι : $\varphi''(x) = -2$.

Καὶ ἐπειδὴ $\varphi''\left(\frac{2\tau - c}{2}\right) = -2 < 0$, ἡ φ εἰς τὴν θέσιν $x = \frac{2\tau - c}{2}$ παρουσιάζει μέγιστον.

Ὥστε τὸ μέγιστον τοῦ E λαμβάνει χώραν ὅταν $x = \frac{2\tau - c}{2}$, ὅτε $y = 2\tau - c - \frac{2\tau - c}{2} = \frac{2\tau - c}{2}$, δηλαδὴ ὅταν τὸ μὲ σταθερὰν πλευρὰν τὴν $z = c$ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι εἰς κάθε μεταβολὴν τοῦ z, διὰ τιμὰς $z = c, c_1, c_2, \ldots$ μὲ $0 < z < \tau$ τὸ ἑκάστοτε τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν θὰ εἶναι τὸ ἀντίστοιχον ἰσοσκελές.

Ζητοῦμεν τώρα ἐκ τῶν τριγώνων τούτων τῶν ἰσοσκελῶν ποῖον θὰ ἔχῃ τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

Ἄς θεωρήσωμεν λοιπὸν ἕνα ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν αὐτῶν τριγώνων.

Τούτου αἱ δύο πλευραὶ ἄς εἶναι αἱ $x = y$, ἡ τρίτη ἡ z μὲ $0 < z < \tau$ καὶ $x+y+z = 2\tau$.

Θὰ ἔχωμεν : $2x + z = 2\tau \Rightarrow z = 2\tau - 2x$ καὶ $E = \sqrt{\tau(\tau - x)^2(\tau - z)} =$

$\sqrt{\tau(\tau-x)^2(2x-\tau)} = \sqrt{\tau} \cdot \sqrt{(\tau-x)^2(2x-\tau)}\left(x > \frac{\tau}{2}\right)$. Θέτομεν: $\sigma(x) = (x-\tau)^2(2x-\tau)$ μὲ $\frac{\tau}{2} < x < \tau$.

Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι: $\sigma'(x) = 2(x-\tau)(2x-\tau)+2(x-\tau)^2$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι $x = \frac{2\tau}{3}$ ἀφοῦ $(x-\tau) < 0$ καὶ $\frac{\tau}{2} < \frac{2\tau}{3} < \tau$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = 12x - 10\tau$ καὶ $f''\left(\frac{2\tau}{3}\right) = 12 \cdot \frac{2\tau}{3} - 10\tau =$ $= -2\tau < 0$ καὶ ἐπομένως εἰς τὴν θέσιν $x = \frac{2\tau}{3}$ ἡ σ παρουσιάζει μέγιστον. Τότε ὅμως θὰ ἔχωμεν: $y = \frac{2\tau}{3}$ καὶ $z = \frac{2\tau}{3}$.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐξ ὅλων τῶν μεγίστων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Εὕρετε ἐξ ὅλων τῶν ὀρθῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον V, ποῖος ἔχει τὴν ἐλαχίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν.**

**Ἀπάντησις.** Ἄς εἶναι x ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του καὶ y τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου κυλίνδρου.

Ἐὰν Ε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια, θὰ ἔχωμεν:

$$E = 2\pi x^2 + 2\pi xy \quad \text{καὶ} \quad V = \pi x^2 y.$$

Ἐπειδὴ $y = \frac{V}{\pi x^2}$ θὰ ἔχωμεν: $E = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} = 2\left(\pi x^2 + \frac{V}{x}\right)$.

Θεωροῦμεν τώρα τὴν συνάρτησιν φ μὲ $\varphi(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$ καὶ $\mathcal{D}(f) = R^+$.

Ἡ παράγωγος εἶναι: $\varphi'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$.

Αἱ ρίζαι τῆς $\varphi'(x) = 0$ εἶναι: $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $\varphi''(x) = 4\left(\pi + \frac{V}{x^2}\right)$ καὶ ἐπειδὴ $\varphi''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0$ ἕπεται, ὅτι ἡ σ εἰς τὴν θέσιν $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ παρουσιάζει ἐλάχιστον. Ἄρα τὸ $E_{min}$ λαμβάνει χώραν διὰ $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ μὲ ἀντίστοιχον ὕψος τὸ $y = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

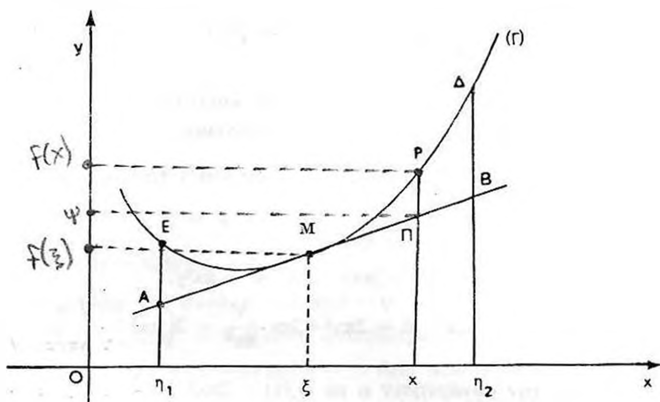
## 12. 28 Κοῖλα καὶ κυρτὰ μιᾶς συναρτήσεως καὶ σημεῖα καμπῆς αὐτῆς

Θεωροῦμεν μίαν συνάρτησιν f ὡρισμένην εἰς ἕνα διάστημα Δ καὶ ἕνα σημεῖον ξ ἐσωτερικὸν τοῦ Δ.

Ὑποθέτομεν ἀκόμη, ὅτι ὑπάρχει ἡ πρώτη παράγωγος $f'(\xi)$ καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος $f''(\xi)$ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$. Γνωρίζομεν ἀκόμη, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ διαγράμματος Γ τῆς f, εἰς τὸ σημεῖον $[\xi, f(\xi)]$, εἶναι : $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$.

**Ὁρισμὸς 1.** *Μία συνάρτησις f θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι κυρτὴ εἰς τὸ διάστημα Δ, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος αὐτῆς, εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ $[\xi, f(\xi)]$, εὑρίσκεται κάτωθεν αὐτοῦ μὲ $\xi \epsilon \Delta$.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἡ συνάρτησις f στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω ἐν Δ. Οὕτως ἂν $\Delta = [\eta_1, \eta_2]$ καὶ $\xi \epsilon \Delta$, τότε ἡ ἐξίσω-




σις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ διαγράμματος (Γ) εἰς τὸ σημεῖον $M[\xi, f(\xi)]$ θὰ εἶναι :

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi).$$

Ἔστω τώρα τυχὸν σημεῖον $x \epsilon \Delta$. Ἡ τεταγμένη τοῦ P ἐπὶ τοῦ (Γ) θὰ εἶναι $f(x)$ καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ Π ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης θὰ εἶναι y. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ f εἶναι κυρτὴ θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) > y \Longleftrightarrow f(x) > f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \Longleftrightarrow f(x) - f(\xi) > f'(\xi)(x - \xi) \ \forall x \epsilon \Delta - \{\xi\}.$$

Καὶ γενικώτερον, ἂν $x_1, x_2$ δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ Δ μὲ $x_1 \neq x_2$, θὰ ἰσχύῃ :

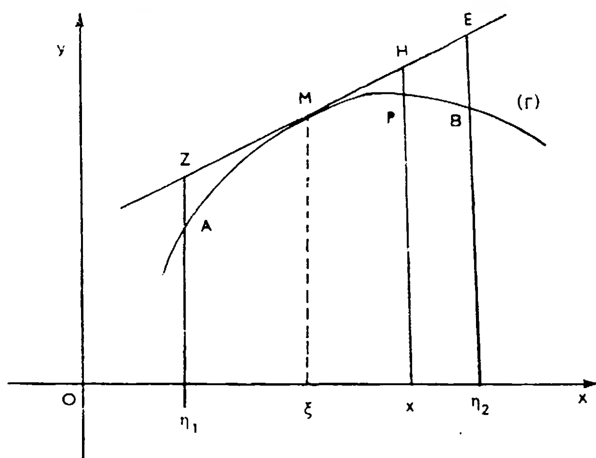
ἡ f κυρτὴ ἐν Δ $\Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > f'(x_2)(x_1 - x_2) \ \forall x_1, x_2 \epsilon \Delta$ μὲ $x_1 \neq x_2$.

**Ὁρισμὸς 2.** *Μία συνάρτησις f θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι κοίλη εἰς τὸ διάστημα Δ, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος αὐτῆς, εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ $[\xi, f(\xi)]$ μὲ $\xi \epsilon \Delta$, εὑρίσκεται ἄνωθεν αὐτοῦ.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης, ὅτι ἡ συνάρτησις f στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω ἐν Δ.

Ἐργαζόμενοι τώρα, ὡς καὶ προηγουμένως, δι' ἕνα σημεῖον $\xi\epsilon\Delta$ εὑρίσκομεν, ἀφοῦ ἡ f εἶναι κοίλη ὅτι θὰ ἰσχύη :

$$f(x) - f(\xi) < f'(\xi)(x - \xi) \quad \forall x \epsilon \Delta - \{\xi\}$$

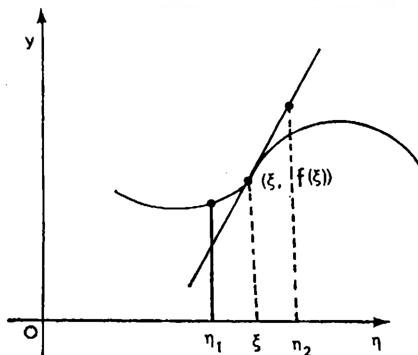


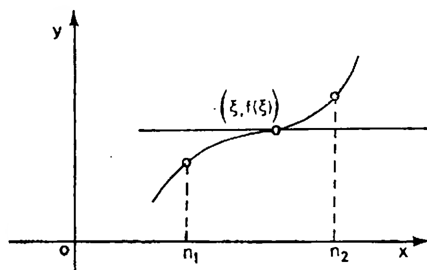

καὶ γενικώτερον ἂν $x_1, x_2 \epsilon \Delta$ μὲ $x_1 \neq x_2$ θὰ ἰσχύη :

ἡ f κοίλη ἐν Δ $\Longleftrightarrow$ $f(x_1) - f(x_2) < f'(x_2)(x_1 - x_2)$ $\forall x_1, x_2 \epsilon \Delta$ μὲ $x_1 \neq x_2$.

*Σημείωσις*. Ἀντὶ τοῦ ὅρου «τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω», χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸν ὅρον «τὰ κυρτὰ πρὸς τὰ κάτω» καὶ ἀντὶ «τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω», τὸν ὅρον «τὰ κυρτὰ πρὸς τὰ ἄνω».

**Ὁρισμὸς 3.** *Μία συνάρτησις f ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα $(\alpha, \beta)$ θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχει σημεῖον καμπῆς τὸ σημεῖον $[\xi, f(\xi)]$, μὲ $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, τοῦ διαγράμματος αὐτῆς, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, αὕτη εἶναι κοίλη, ἀντιστοίχως κυρτή, εἰς τὸ διάστημα $(\alpha, \xi)$ καὶ κυρτή, ἀντιστοίχως κοίλη, εἰς τὸ διάστημα $(\xi, \beta)$.*



Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ἡ ἑξῆς :
Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $(\xi, f(\xi))$ αὐτοῦ, διαπερᾶ τὸ διάγραμμα τῆς f, ὡς εἰς τὰ ἄνω σχήματα.

Διὰ τὴν ἔρευναν τῶν ἀνωτέρω διὰ μίαν συνάρτησιν f μᾶς βοηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις :

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. Ἐὰν διὰ τὴν συνάρτησιν f ὑπάρχῃ ἡ f″ καὶ εἶναι πεπερασμένη $\forall x \in (\alpha, \beta) = \Delta$, τότε :**

**α) Ἐὰν $f''(x) > 0$ $\forall x \in \Delta$, τότε ἡ f κυρτὴ ἐν Δ.**

**β) Ἐὰν $f''(x) < 0$ $\forall x \in \Delta$, τότε ἡ f κοίλη ἐν Δ.**

**Ἀπόδειξις. α)** Ἄς θεωρήσωμεν δύο τιμὰς τοῦ x ἀπὸ τὸ $(\alpha, \beta)$. Ἔστω τὰς $x_1, x_2$ μὲ $x_1 < x_2$· ἐπειδὴ ὑπάρχει ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς f $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε θὰ ὑπάρχῃ καὶ $\forall x \in [x_1, x_2]$.

Ἐπειδὴ ἡ f εἰς τὸ διάστημα $[x_1, x_2]$ πληροῖ τὰς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς, ἕπεται ὅτι θὰ ὑπάρχῃ $\xi \in (x_1, x_2)$ οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύῃ : $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ μὲ $\xi \in (x_1, x_2)$.

Θεωροῦμεν τώρα τὴν συνάρτησιν πρώτης παραγώγου τῆς f, ἤτοι τὴν f′, ἡ ὁποία εἰς τὸ διάστημα $[x_1, \xi]$ πληροῖ τὰς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς καὶ ἑπομένως ὑπάρχει $\xi_1 \in (x_1, \xi)$ οὕτως, ὥστε :

$$f'(\xi) - f'(x_1) = f''(\xi_1)(\xi - x_1) \Longleftrightarrow f'(\xi) = f'(x_1) + f''(\xi_1)(\xi - x_1).$$

Τότε ὅμως ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f''(\xi_1)(\xi - x_1)(x_2 - x_1) \Longleftrightarrow f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1) = f''(\xi_1)(\xi - x_1)(x_2 - x_1).$$

Ἀλλὰ $f''(x) > 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$, ἑπομένως καὶ $f''(\xi_1) > 0$ ἀφοῦ $\xi_1 \in (x_1, \xi) \subset (\alpha, \beta)$ καὶ ἐπὶ πλέον $x_2 > x_1$ καὶ $\xi > x_1$, ὁπότε : $f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1) > 0$ $\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ μὲ $x_1 < x_2$. Τοῦτο ὅμως σημαίνει, ὅτι ἡ f κυρτὴ ἐν $(\alpha, \beta)$.

**β)** Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ὅτι ἂν $f''(x) < 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε ἡ f κοίλη ἐν $(\alpha, \beta)$.

Παρακολουθήσατε τώρα τὰς ἀκολούθους λίαν χρησίμους παρατηρήσεις, αἱ ὁποῖαι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ διασαφηνίσωμεν τὸν ρόλον τῆς δευτέρας παραγώγου εἰς τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων.

**Παρατήρησις 1.** Κατ' ἀρχὴν συμπληρώνομεν, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν διὰ τὴν συνάρτησιν f′ (τῆς πρώτης παραγώγου τῆς f) θὰ θεωρήσωμεν τὸ διάστημα $[\xi, x_2]$ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία τῶν προηγουμένων δι' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις (α), (β).

**Παρατήρησις 2.** Ἐὰν ἡ συνάρτησις f″ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, ὅπως συμβαίνει ἂν ὑπάρχῃ ἡ τρίτη παράγωγος τῆς f εἰς τὸ ξ, τότε ἡ f″, ἐπειδὴ εἶναι συνεχής, παραμένει θετική, ἀντιστοίχως ἀρνητικὴ εἰς μίαν περιοχὴν $\pi(\xi) \subseteq (\alpha, \beta)$ τοῦ ξ.

**Παρατήρησις 3.** Ἐὰν εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$ εἶναι $f''(\xi) = 0$, ἐνῷ $f'''(\xi) \neq 0$, τότε τὸ σημεῖον $[\xi, f(\xi)]$ εἶναι σημεῖον καμπῆς τῆς f.

Πράγματι ἂν $f'''(\xi) > 0$, τότε ἡ f″ ἀνέρχεται εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$, δηλαδὴ ἔχομεν:

$$f''(x) < f''(\xi) = 0 \quad \forall x \epsilon (\xi - \varepsilon, \xi)$$

καὶ

$$f''(x) > f''(\xi) = 0 \quad \forall x \epsilon (\xi, \xi + \varepsilon)$$

Τοῦτο ὅμως σημαίνει, ὅτι ἡ f εἶναι κοίλη εἰς τὸ $(\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ κυρτὴ εἰς τὸ $(\xi, \xi + \varepsilon)$, ποὺ σημαίνει, ὅτι τὸ σημεῖον $[\xi, f(\xi)]$ εἶναι σημεῖον καμπῆς τῆς f.

Διὰ τῆς αὐτῆς ἐργασίας εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ $[\xi, f(\xi)]$ εἶναι ἐπίσης σημεῖον καμπῆς τῆς f, ὅταν $f'''(\xi) < 0$.

**Παρατήρησις 4.** Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος f″ εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \Delta$, ἐξετάζομεν τὸ πρόσημον τῆς f″ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ. Καὶ ἂν εἶναι $f''(x) < 0 \ \forall x \epsilon (\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ $f''(x) > 0 \ \forall x \epsilon (\xi, \xi + \varepsilon)$, τότε προφανῶς τὸ $[\xi, f(\xi)]$ εἶναι σημεῖον καμπῆς τῆς f.

Ὁμοίως ἂν $f''(x) > 0 \ \forall x \epsilon (\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ $f''(x) < 0 \ \forall x \epsilon (\xi, \xi + \varepsilon)$ ἔχομεν σημεῖον καμπῆς.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ὅταν ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ ἡ f″ ἑκατέρωθεν τοῦ ξ ἀλλάσσῃ πρόσημον, τότε ἀναγκαίως θὰ ἔχωμεν: $f''(\xi) = 0$.

Ὥστε ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ σημεῖον $[\xi, f(\xi)]$ εἶναι σημεῖον καμπῆς, εἶναι ὅπως $f''(\xi) = 0$. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει, δηλαδὴ ἂν $f''(\xi) = 0$ δὲν σημαίνει κατ᾿ ἀνάγκην, ὅτι τὸ $[\xi, f(\xi)]$ εἶναι καὶ σημεῖον καμπῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x^6$. Εἶναι τὸ σημεῖον $x = 0$ σημεῖον καμπῆς;**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Ἔχομεν $f'(x) = 6x^5$ καὶ $f''(x) = 30x^4$ καὶ προφανῶς $f''(0) = 0$. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον $(0, 0)$ δὲν εἶναι σημεῖον καμπῆς τῆς f ἀφοῦ ἑκατέρωθεν τοῦ $x = 0$ εἶναι $f''(x) > 0$ καὶ συνεπῶς εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ μηδενὸς ἡ f εἶναι κυρτή.

## 12. 29 Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. **Ἐξετάσατε τὰς ἀκολούθους συναρτήσεις εἰς ποῖα διαστήματα εἶναι κυρταὶ ἢ κοῖλαι:**

**α)** $f(x) = 2x^3 - 4x^2$      **γ)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$

**β)** $f(x) = \log x$      **δ)** $f(x) = e^x$

**Ἀπάντησις. α)** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι: $f'(x) = 6x^2 - 8x$ καὶ αἱ ρίζαι τῆς $f'(x) = 0$ εἶναι: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = 12x - 8$ $\forall x \in R$.

Ρίζαι τῆς $f''(x) = 0$ εἶναι: $x = \frac{2}{3}$.

Συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα ἡ f θὰ εἶναι κυρτὴ $\forall x \in R$ διὰ τὸ ὁποῖον $f''(x) > 0$, ἤτοι διὰ $x > \frac{2}{3}$ καὶ f κοίλη διὰ $\forall x \in R$ διὰ τὸ ὁποῖον $f''(x) < 0$, ἤτοι διὰ $x < \frac{2}{3}$.

**β)** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R^+$. Ἔχομεν $f'(x) = \frac{1}{x}$ καὶ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in R^+$. Ἐπειδὴ ὅμως $f''(x) < 0$ $\forall x \in R^+$, ἕπεται ὅτι $\forall x \in R^+$ ἡ f εἶναι κοίλη.

γ) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R - \{0\}$. Ἔχομεν $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ $\forall x \in R - \{0\}$ καὶ

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Εὑρίσκομεν τώρα διὰ ποῖα $x \in \mathcal{D}(f)$ εἶναι $f''(x) > 0 \iff \frac{2}{x^3} > 0 \iff x > 0$.

Ἄρα ἡ f εἶναι κυρτὴ $\forall x \in (0, +\infty)$.
Καὶ ἐπειδὴ $f''(x) < 0$ $\forall x \in (-\infty, 0)$ ἡ f εἶναι κοίλη $\forall x \in (-\infty, 0)$.

δ) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Ἔχομεν $f'(x) = e^x$ καὶ $f''(x) = e^x$ $\forall x \in R$ καὶ ἐπειδὴ $\forall x \in R$ εἶναι $f''(x) > 0$, ἕπεται ὅτι ἡ f εἶναι κυρτὴ $\forall x \in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Εὕρετε διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $\lambda \in R$ ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x^4 + \lambda x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 1$ εἶναι κυρτὴ $\forall x \in R$.**

**Ἀπάντησις.** Εἶναι $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ $f''(x) = 12x^2 + 6\lambda x + 3$. Ἐὰν τώρα εἶναι $f''(x) > 0$ $\forall x \in R$, τότε ἡ f εἶναι κυρτὴ $\forall x \in R$.

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως $12x^2 + 6\lambda x + 3 > 0$ $\forall x \in R$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ $36\lambda^2 - 144 < 0 \iff \lambda^2 < 4 \iff -2 < \lambda < 2$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Εὕρετε τὰ σημεῖα καμπῆς τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:**

**α)** $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 3$ **β)** $f(x) = \log x$

**γ)** $f(x) = e^{-x^2}$ **δ)** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

**Ἀπάντησις. α)** Ἔχομεν: $\mathcal{D}(f) = R$. Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι: $f'(x) = 10x^4 - 12x^3$ $\forall x \in R$. Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι $f''(x) = 40x^3 - 36x^2$. Αἱ ρίζαι τῆς $f''(x) = 0$ εἶναι αἱ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{9}{10}$.

Ὥστε πιθανὰ σημεῖα καμπῆς εἶναι τὰ $x = 0$ καὶ $x = \frac{9}{10}$.

Ἐπειδὴ διὰ $x = 0$ ἔχομεν:

$$f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = -72 < 0$$

ἡ f διὰ $x = 0$ παρουσιάζει μέγιστον.

Διὰ $x = \frac{9}{10}$ ἔχομεν σημεῖον καμπῆς, διότι διὰ $x > \frac{9}{10}$ εἶναι $f''(x) > 0$ καὶ διὰ

$0 < x < \frac{9}{10}$ εἶναι $f''(x) < 0$. Δηλαδὴ ἡ $f''$ ἑκατέρωθεν τοῦ $\frac{9}{10}$ $\left(\text{περιοχῆς τοῦ } \frac{9}{10}\right)$ ἀλλάσσει πρόσημον.

β) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R^+$. Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ καὶ ἡ δευτέρα $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ρίζαι τῆς $f''(x) = 0$ δὲν ὑπάρχουν. Ἄρα οὔτε σημεῖα καμπῆς.

γ) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$. Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ καὶ ἡ δευτέρα $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

Ρίζαι τῆς $f''(x) = 0$ εἶναι αἱ $x_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἐπειδὴ τόσον ἑκατέρωθεν τοῦ $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ὅσον καὶ τοῦ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἡ $f''$ ἀλλάσσει πρόσημον, ἕπεται ὅτι εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων ἔχομεν καὶ σημεῖον καμπῆς.

δ) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$. Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$ καὶ ἡ δευτέρα εἶναι :

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}.$$ Αἱ ρίζαι τῆς $f''(x) = 0$

εἶναι αἱ $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$.

Ἐπειδὴ ἡ $f''$ ἀλλάσσει πρόσημον ἑκατέρωθεν ἑκάστου τούτων, ἕπεται ὅτι ἡ $f$ εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων παρουσιάζει καὶ σημεῖον καμπῆς. Τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι τά :

$$(0, 0), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ καὶ } \left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right).$$

## 12. 30 Θεώρημα Darboux

**Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι παραγωγίσιμος $\forall x \in [\alpha, \beta]$ καὶ εἶναι $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$, τότε ἡ παράγωγος $f'(x)$ μὲ $\mathcal{D}(f') = [\alpha, \beta]$ λαμβάνει κάθε τιμὴν μεταξὺ τῶν $f'(\alpha)$ καὶ $f'(\beta)$.**

**Ἀπόδειξις.** Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

α) Νὰ εἶναι $f'(\alpha) < f'(\beta)$.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι $\forall \theta \in [f'(\alpha), f'(\beta)]$ ὑπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε $f'(\xi) = \theta$.

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $f_1$ μὲ $f_1(x) = f(x) - \theta x$ καὶ μὲ $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε $f'_1(x) = f'(x) - \theta$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Ἐπειδὴ ἡ $f_1$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$, ἀφοῦ εἶναι παραγωγίσιμος $\forall \epsilon x[\alpha, \beta]$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ διὰ τὸ ὁποῖον ἡ $f_1$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην αὐτῆς τιμήν. Ἀλλὰ $f'_1(\alpha) = f'(\alpha) - \theta < 0$, ἀφοῦ $\theta > f'(\alpha)$ καὶ ἀντιστοίχως $f'_1(\beta) = f'(\beta) - \theta > 0$ ἀφοῦ $\theta < f'(\beta)$, καὶ ἑπομένως ἡ $f_1$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ εἰς τὸ α, ἀντιστοίχως εἰς τὸ β, ἐλάχιστον, ἀφοῦ εἰς ἑκάστην

περιοχὴν τοῦ α, ἀντιστοίχως τοῦ β, ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον x, μὲ $x_1 > \alpha$ οὕτως, ὥστε $f_1(\alpha) > f_1(x_1)$ καὶ ἀντιστοίχως $x_2 < \beta$ οὕτως, ὥστε $f_1(\beta) > f_1(x_2)$. Ἑπομένως ἡ $f_1$ ἔχει ἐλάχιστον εἰς ἕνα σημεῖον $\xi \in (\alpha, \beta)$, ὁπότε $f'_1(\xi) = f'(\xi) - \theta = 0$, ἤτοι $f'(\xi) = \theta$.

## 12. 31 Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς
### Τύπος Taylor — Τύπος Mac Laurin

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $\mathcal{D}(f) = [\alpha, \beta]$ καὶ ὑποθέτομεν ὅτι:**

**α) ἡ f εἶναι ν φορὰς συνεχῶς παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ $\mathcal{D}(f)$.**

**β) Ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f τάξεως ν+1, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.**

**Τότε διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν k μὲ $k \leq \nu + 1$ ὑπάρχει σημεῖον $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε:**

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta - \alpha)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^k \cdot (\beta - \xi)^{\nu - k + 1}}{k \cdot \nu!} f^{(\nu+1)}(\xi)$$

**ποὺ καλεῖται τύπος τοῦ Taylor.**

**Ἀπόδειξις.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν F μὲ

$$F(x) = f(x) + \frac{\beta - x}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{(\beta - x)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + (\beta - x)^k . c$$

ὅπου c ἀριθμὸς πραγματικὸς ὁριζόμενος ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta - \alpha)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha) + (\beta - \alpha)^k c \quad (1)$$

Διὰ τὴν συνάρτησιν F, ὡς εὐκόλως προκύπτει, γνωρίζομεν τὰ ἀκόλουθα:

1) Εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $\mathcal{D}(f) = [\alpha, \beta]$, ὡς ἄθροισμα τῶν συνεχῶν συναρτήσεων $f, f', \ldots, f^{(\nu)}$ (ἀφοῦ ὑπάρχουν παράγωγοι μέχρι καὶ τῆς τάξεως ν) καὶ τῆς $(\beta - x)^k$.

2) Εἶναι παραγωγίσιμος $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

3) $F(\alpha) = F(\beta)$ (διότι $F(\alpha) = f(\beta)$ καὶ $F(\beta) = f(\beta)$, δυνάμει καὶ τῆς (1)].

Ἑπομένως διὰ τὴν F ἰσχύουν ὅλαι αἱ συνθῆκαι τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle καὶ συνεπῶς ὑπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $F'(\xi) = 0$.

Εἶναι ὅμως :

$$F'(x) = f'(x) - f'(x) + \frac{\beta - x}{1!} f''(x) - \frac{\beta - x}{1!} f''(x) + \frac{(\beta - x)^2}{2!} f^{(3)}x -$$

$$- \frac{(\beta - x)^2}{2!} f^{(3)}(x) + \ldots + \frac{(\beta - x)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!} f^{(\nu)}(x) - \frac{(\beta - x)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!} f^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \frac{(\beta - x)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x) - k(\beta - x)^{k-1}c = \frac{(\beta - x)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x) - k(\beta - x)^{k-1} \cdot c$$

καὶ ἐπομένως μὲ $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$ θὰ ἔχωμεν, ὅτι ἡ $F'(\xi) = 0$ μᾶς δίδει :

$$\frac{(\beta - \xi)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu+1)}(\xi) - k(\beta - \xi)^{k-1}c = 0 \iff c = \frac{(\beta - \xi)^{\nu-k+1}}{k \cdot \nu!} f^{(\nu+1)}(\xi).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τῆς c εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν τὸν τύπον τοῦ Taylor.

Τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ τύπου τοῦ Taylor χαρακτηρίζομεν μὲ τὴν ἔκφρασιν **ὑπόλοιπον τάξεως ν τοῦ τύπου τοῦ Taylor** καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ $R_\nu$, ἤτοι :

$$R_\nu = \frac{(\beta - \alpha)^k (\beta - \xi)^{\nu-k+1}}{k \cdot \nu!} f^{(\nu+1)}(\xi) \text{ μὲ } \xi \epsilon (\alpha, \beta)$$

## 12. 32 Μερικαὶ περιπτώσεις ἀξιοσημείωτοι τοῦ $R_\nu$

Ὡς εἶναι φανερὸν ἡ ἑκάστοτε ἔκφρασις τοῦ $R_\nu$ εἶναι καὶ διαφορετικὴ ἐξαρτωμένη ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ k. Χαρακτηριστικώτεραι ἐκφράσεις εἶναι αἱ κατωτέρω αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς $k = 1$ καὶ $k = \nu + 1$.

Διὰ $k = 1$ ἔχομεν τὸ **ὑπόλοιπον κατὰ Cauchy** τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$R_\nu = \frac{(\beta - \xi)^{\nu} \cdot (\beta - \alpha)}{\nu!} f^{(\nu+1)}(\xi).$$

Διὰ $k = \nu + 1$ ἔχομεν **τὸ ὑπόλοιπον Lagrange** τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$R_\nu = \frac{(\beta - \alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\xi).$$

Μὲ χρῆσιν τοῦ ὑπολοίπου Lagrange ὁ τύπος τοῦ Taylor γίνεται :

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta - \alpha)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha) +$$

$$+ \frac{(\beta - \alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\xi) \text{ μὲ } \xi \epsilon (\alpha, \beta) \qquad \text{(A)}$$

Εἰς τὸν τύπον αὐτὸν ἀντικαθιστῶμεν τὸ β μὲ x, δηλαδὴ ἂν θεωρήσωμεν τὸ διάστημα $[\alpha, x] \subset [\alpha, \beta]$, τότε ὑπάρχει $\xi_x \epsilon (\alpha, x)$ οὕτως, ὥστε :

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha) +$$

$$+ \frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\xi_x)$$

Καὶ ἐπειδὴ $0 < \xi_x < x$ θὰ ἔχωμεν : $\xi_x = \alpha + \theta(x-\alpha)$ μὲ $0 < \theta < 1$. Πράγματι ἐπειδὴ $0 < \theta < 1 \Rightarrow 0 < \theta\,(x-\alpha) < x-\alpha \Rightarrow \alpha < \alpha+\theta(x-\alpha) < x \Rightarrow \alpha < \xi_x < x$. Καὶ ὁ τύπος γίνεται :

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha) +$$

$$+ \frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\alpha+\theta(x-\alpha)) \text{ μὲ } 0 < \theta < 1 \qquad (\mathrm{B})$$

Ἐὰν πάλιν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (Α) θέσωμεν ἀντὶ α τὸ x καὶ ἀντὶ β τὸ $x+\varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$ καὶ διὰ τὸ διάστημα $[x, x+\varepsilon]$ ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις τοῦ βασικοῦ θεωρήματος, τότε θὰ ὑπάρχῃ $\xi_x \epsilon (x, x+\varepsilon)$ οὕτως, ὥστε :

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{1!} f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\nu!} f^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\xi_x),$$

ὅπου ὅμως τώρα ἀφοῦ $\xi_x \epsilon (x, x+\varepsilon)$ θὰ εἶναι $\xi_x = x+\theta\varepsilon$ μὲ $0 < \theta < 1$ καὶ ὁ τύπος γίνεται :

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{1!} f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(x+\theta\varepsilon) \text{ μὲ } 0 < \theta < 1, \qquad (\Gamma).$$

Ἐὰν τώρα τεθῇ ὅπου $x = 0$ καὶ $\varepsilon = x$, ἐφ' ὅσον ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις τοῦ βασικοῦ θεωρήματος διὰ τὸ διάστημα $[0, x]$ θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) + \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\theta x) \text{ μὲ}$$

$$0 < \theta < 1, \qquad (\Delta).$$

Ὁ τύπος αὐτὸς καλεῖται Τύπος Mac Laurin.

Ὁ τύπος τοῦ MacLaurin ἐφαρμόζεται διὰ μίαν συνάρτησιν f, ἂν αὐτὴ ἔχῃ εἰς τὸ διάστημα $[0, x]$ παραγώγους μέχρι καὶ τῆς ν–τάξεως, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις εἰς τὸ $[0, x]$ καὶ νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς τάξεως $\nu+1$ εἰς τὸ διάστημα $(0, x)$.

**Παρατήρησις 1.** Γνωρίζομεν, ὅτι τὰ ἀκέραια πολυώνυμα ἔχουν παρα-

γώγους πάσης τάξεως καὶ ὅτι ἂν τοῦτο εἶναι βαθμοῦ ν θὰ ἔχωμεν, ὅτι ἡ ν-τάξεως παράγωγος αὐτοῦ εἶναι μία σταθερὰ καὶ πέραν τούτου πᾶσαι αἱ παράγωγοι μηδενικαί.

Ὥστε δι' ἕνα πολυώνυμον π(x) βαθμοῦ ν θὰ ἰσχύη:

$$\pi(x) = \pi(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!}\pi'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}\pi''(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu!}\pi^{(\nu)}(\alpha),$$

ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπον (B).

Διὰ $\alpha = 0$ ὁ τύπος γίνεται:

$$\pi(x) = \pi(0) + \frac{x}{1!}\pi'(0) + \frac{x^2}{2!}\pi''(0) + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!}\pi^{(\nu)}(0).$$

**Σημείωσις.** Ἡ θεωρία ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἔχει μεγάλην ἔκτασιν, ἐκρίναμεν δὲ σκόπιμον νὰ ἀναφέρωμεν τὰ πολὺ βασικὰ διὰ τὴν χρῆσιν τῶν ἀνωτέρω τύπων εἰς ὡρισμένα θέματα τὰ ὁποῖα εἶναι χρήσιμα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁριακῶν τιμῶν καὶ τῶν ἀναπτυγμάτων (ὡς λέγομεν) μερικῶν πολὺ χρησίμων συναρτήσεων.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ συνάρτησις $f(x) = e^x$ ($\mathcal{D}(f) = R$) εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Taylor.**

**Ἀπάντησις.** Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ f ἔχει παραγώγου συνεχεῖς πάσης τάξεως καὶ εἶναι $f^{(\nu)}(x) = e^x \; \forall x \in R$ καὶ $\forall \nu \in N$. Χρησιμοποιοῦντες τώρα τὸν τύπον τοῦ Taylor μὲ ὑπόλοιπον Lagrange καὶ ἐπειδὴ $f^{(\nu)}(0) = e^0 = 1 \; \forall \nu \in N$. (Τύπος Δ) λαμβάνομεν:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{\theta x}$$

ὅπου $0 < \theta < 1$. Τὸ θ μεταβάλλεται μετὰ τῶν ν καὶ x.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τεθῇ $x = 1$, λαμβάνομεν:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \frac{e^{\theta\nu}}{(\nu+1)!} \quad \text{μὲ} \quad 0 < \theta_\nu < 1$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ $e^{\theta\nu} \mid \nu \in N$ εἶναι μία ἀκολουθία φραγμένη, ἐνῶ ἡ $\frac{1}{(\nu+1)!} \mid \nu \in N$ εἶναι μηδενική, ἕπεται ὅτι $\frac{e^{\theta\nu}}{(\nu+1)!} \to 0$ τοῦ $\nu \to +\infty$, ὁπότε ἔχομεν τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \ldots$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν Taylor ἡ συνάρτησις f(x) = ημx.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$. Γνωρίζομεν, ὅτι ὑπάρχει παράγωγος πάσης τάξεως τῆς f(x) = ημx καὶ εἶναι:

$$f^{(\nu)}(x) = \eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{2} + x\right) \; \forall x \in R.$$

Διὰ $\nu = 2\lambda \mid \lambda \in N$ ἔχομεν:

$$f^{(2\lambda)}(x) = \eta\mu(\lambda\pi + x) = (-1)^\lambda \eta\mu x$$

καὶ $f^{(2\lambda-1)}(x) = (-1)^{\lambda-1}\sigma\upsilon\nu x$ καὶ ὅτι: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ $f'''(0) = -1$, ἤτοι.

$$f^{(2\lambda-1)}(0) = (-1)^{\lambda-1} \quad \text{καὶ} \quad f^{(2\lambda)}(0) = 0 \quad \text{μὲ } \lambda \in N.$$

Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν:

$$ημx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{ν-1}\frac{x^{2ν-1}}{(2ν-1)!} + (-1)^ν \frac{x^{2ν+1}}{(2ν+1)!} συν(θx)$$

μὲ $0 < θ < 1$. καὶ ὅτι:

$$ημx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{ν-1}\frac{x^{2ν-1}}{(2ν-1)!} + \ldots$$

διότι $R_ν \to 0$ τοῦ $ν \to +\infty$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$συνx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{ν-1}\frac{x^{2ν-2}}{(2ν-2)!} + \ldots$$

Ὁμοίως ὅτι:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{ν-1}\frac{x^ν}{ν} + \ldots$$

(διότι ὁ logx δὲν ὁρίζεται εἰς τὴν θέσιν $x = 0$) μὲ $0 \leq x \leq 1$.

Οἱ ἐνδιαφερόμενοι διὰ περαιτέρω μελέτην ἂς ἀνατρέξουν εἰς τὴν (ἀντίστοιχον) βιβλιογραφίαν.

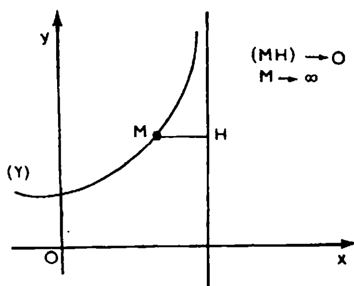
## 12. 33 Ἀσύμπτωτος (διαγράμματος) μιᾶς συναρτήσεως

Συχνὰ κατὰ τὴν μελέτην μιᾶς συναρτήσεως f παρουσιάζονται περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίσωμεν τὴν συμπεριφοράν της, ὅταν κάποιο σημεῖον τοῦ διαγράμματος αὐτῆς ἀπομακρύνεται πρὸς τὸ ἄπειρον.

Εἶναι δυνατὸν τὸ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμενον διάγραμμα τῆς f. νὰ πλησιάζη μίαν κάποιαν ὡρισμένην εὐθεῖαν.

Αὐστηρότερον τὰ πράγματα ἔχουν ὡς ἑξῆς.

**Ὁρισμὸς 1.** *Καλοῦμεν ἀσύμπτωτον εὐθεῖαν τοῦ διαγράμματος (γ) μιᾶς συναρτήσεως f, τὴν εὐθεῖαν ἀπὸ τῆς ὁποίας ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου M, κινουμένου ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τοῦ διαγράμματος τῆς f, τείνει πρὸς τὸ μηδέν (ὡς εἰς τὸ σχῆμα).*



Τὰς ἀσυμπτώτους εὐθείας διακρίνομεν εἰς κατακορύφους ὁριζοντίας καὶ πλαγίας.

**Ὁρισμὸς 2.** *Μία εὐθεῖα $x = \xi$ θὰ καλῆται κατακόρυφος ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος μιᾶς συναρτήσεως f, ὅπου $\xi \epsilon R$ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$.*

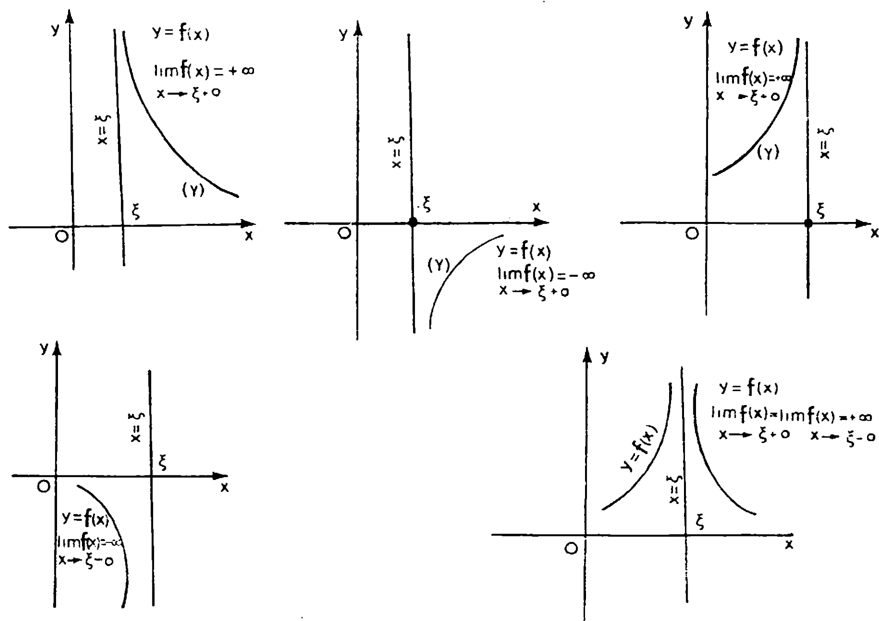
*Σημείωσις.* Τὴν ἀσύμπτωτον εὐθεῖαν τοῦ διαγράμματος τῆς f. θὰ καλοῦμεν τοῦ λοιποῦ ἀσύμπτωτον τῆς f.

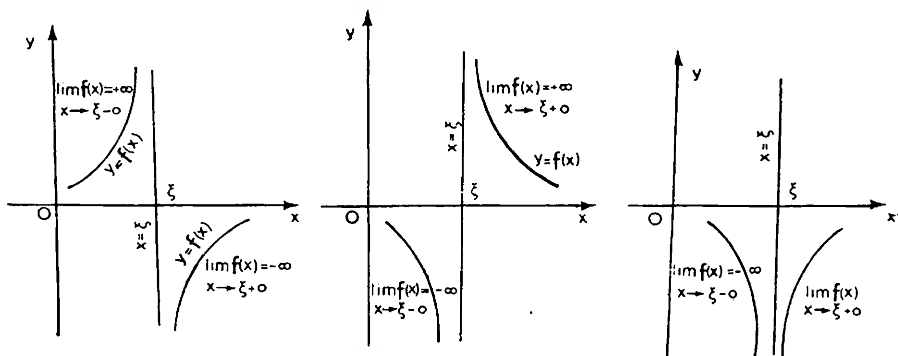
**Παρατήρησις 1.** Ἐὰν τὸ σημεῖον $\xi \epsilon R$ εἶναι δεξιόπλευρον σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$ καὶ $\lim\limits_{x \to \xi+0} f(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$ τότε ἡ $x = \xi$ εἶναι ἀριστερὰ κατακόρυφος ἀσύμπτωτος τῆς f (ὡς εὑρισκομένη ἀριστερὰ τοῦ διαγράμματος τῆς f).

**Παρατήρησις 2.** Ἐὰν τὸ σημεῖον $\xi \epsilon R$ εἶναι ἀριστερόπλευρον σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$ καὶ $\lim\limits_{x \to \xi-0} f(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$ ,τότε ἡ $x = \xi$ εἶναι δεξιὰ κατακόρυφος ἀσύμπτωτος τῆς f.

**Παρατήρησις 3.** Ἐὰν τὸ σημεῖον $\xi \epsilon R$ εἶναι ἀμφίπλευρον σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$ καὶ $\lim\limits_{x \to \xi+0} f(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$ καὶ $\lim\limits_{x \to \xi-0} f(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$, τότε ἡ $x = \xi$ εἶναι ἀμφίπλευρος κατακόρυφος ἀσύμπτωτος τῆς f.

Τὰ ἀνωτέρω φαίνονται σαφῶς εἰς τὰ ἀκόλουθα σχήματα.

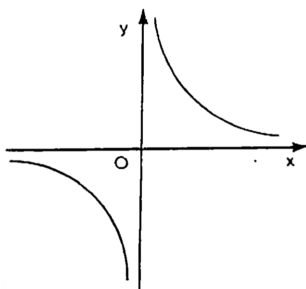





Κατόπιν τῶν προηγουμένων, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς κατακορύφους ἀσυμπτώτους μιᾶς συναρτήσεως f (ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν) ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $x = \xi \epsilon \mathcal{D}(f)$ ἡ συνάρτησις f μὲ $y = f(x)$, ἀπειρίζεται θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς ὅταν $x \to \xi$, ὁπότε αἱ εὐθεῖαι $x = \xi$ θὰ εἶναι αἱ κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι τῆς f.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = \frac{3}{x}$ μὲ $\mathcal{D}(f) = R - \{0\}$.**

**'Απάντησις.** Παρατηροῦμεν ὅτι: $\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$ καὶ $\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$. Ἑπομένως $x = 0$ καὶ ἡ f ἔχει ὡς ἀσύμπτωτον κατακόρυφον, καὶ ἀριστερὰν καὶ δεξιάν, τὸν ἄξονα τῶν y, ὡς εἰς τὸ σχῆμα:




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ μὲ $\mathcal{D}(f) = R - \{0\}$.**

**'Απάντησις.** Γνωρίζομεν, ὅτι $\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$, ἑπομένως ἡ f ἔχει μίαν μόνον ἀριστερὰν κατακόρυφον ἀσύμπτωτον, τὴν εὐθεῖαν $x = 0$.

**Παρατήρησις 1.** Μία συνάρτησις f εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ὁρίζεται εἰς τὸ σημεῖον ξ καὶ ἡ εὐθεῖα $x = \xi$ νὰ εἶναι ἀσύμπτωτος αὐτῆς.

Ἐπίσης εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίζεται εἰς τὸ σημεῖον ξ καὶ ἡ εὐθεῖα $x = \xi$ νὰ εἶναι ἀσύμπτωτος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \frac{3}{x}$ ὁρίζεται οὕτως:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 0 & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$$

**Ὑπάρχει κατακόρυφος ἀσύμπτωτος αὐτῆς;**

Ἀπάντησις. Παρὰ τὸ ὅτι αὕτη εἶναι ὡρισμένη διὰ $x = 0$ ἡ εὐθεῖα $x = 0$ εἶναι κατακόρυφος ἀσύμπτωτος αὐτῆς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἔστω ἡ συνάρτησις f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ἂν } x \in R^+ \\ -x & \text{ἂν } x \in R_o^- \end{cases}$$

**Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι αὐτῆς.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ f ἐδῶ εἶναι ὡρισμένη $\forall x \in R$. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι ὑπάρχει τὸ $\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει κατακόρυφος ἀσύμπτωτος ἡ $x = 0$ καὶ μάλιστα ἀριστερὰ τοῦ διαγράμματος.

**Παρατήρησις 2.** Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ τοῦ $\lim_{x \to \xi+0} f(x)$ θὰ πρέπει ἡ συνάρτησις f νὰ εἶναι ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\xi, \beta)$ καὶ διὰ τὸ $\lim_{x \to \xi-0} f(x)$ εἰς ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, \xi)$.

**Παρατήρησις 3.** Ἐὰν εἰς ἕνα σημεῖον $\xi \in R$ ἡ συνάρτησις f εἶναι ἀσυνεχὴς ἢ ἂν εἰς τὸ ξ ἡ f δὲν ὁρίζεται, τότε ἡ εὐθεῖα $x = \xi$ δύναται νὰ εἶναι κατακόρυφος ἀσύμπτωτος.

**Παρατήρησις 4.** Διὰ μίαν ρητὴν συνάρτησιν αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τοῦ παρονομαστοῦ δύνανται νὰ εἶναι ἀσύμπτωτοι κατακόρυφοι.

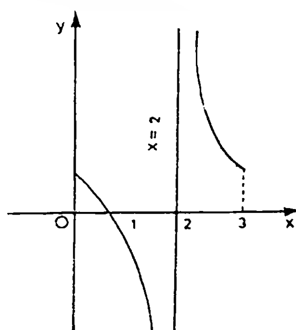
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1}$ καὶ μὲ $\mathcal{D}(f) = [0, 3] - \{2\}$.**

**Εἶναι ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι $x = 2$, $x = -1$;**

**Ἀπάντησις.** Ἐπειδὴ f ὁρίζεται εἰς τὸ $[0, 3] - \{2\}$, τὸ $-1$ δὲν εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$ καὶ ἑπομένως ἡ $x = 1$ δὲν εἶναι ἀσύμπτωτος αὐτῆς. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ 2 εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$, ἀφοῦ ἡ f εἶναι ὡρισμένη καὶ δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τοῦ 2, ἀναζητοῦμεν τὸ $\lim_{x \to 2+0} f(x)$ καὶ τὸ $\lim_{x \to 2-0} f(x)$.

Ἔχομεν: $\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \left( \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$ καὶ $\lim_{x \to 2-0} f(x) =$

$= \lim\limits_{x \to 2-0} \left( \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} \right) = -\infty$. Συνεπῶς ἡ εὐθεία x = 2 εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς f κατακόρυφος ἀμφίπλευρος, ὡς εἰς τὸ σχῆμα.




**Ὁρισμὸς 3.** *Μία εὐθεία $y = \lambda \epsilon R$ θὰ καλῆται ὁριζοντία ἀσύμπτωτος τῆς συναρτήσεως f, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν:*

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ *[$+\infty$ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$]*

ἢ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ *[$-\infty$ σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$]*

ἢ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ *[$+\infty$ καὶ $-\infty$ σημεῖα συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$]*

Καὶ λεπτομερέστερον ὡς ἀκολούθως.

**α)** Ἐὰν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ καὶ διὰ $x > n$, ὅπου $n \epsilon R$ καὶ στοιχεῖον ἑνὸς διαστήματος τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$, εἶναι $f(x) > \lambda$, τότε ἡ $y = \lambda$ καλεῖται ὁριζοντία ἀσύμπτωτος κάτω (ἐννοεῖται τοῦ διαγράμματος τῆς f) καὶ δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y.

**β)** Ἐὰν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ καὶ $f(x) > \lambda$ διὰ $x < n \epsilon R$ μὲ $n \epsilon (-\infty, \alpha)$, τότε ἡ $y = \lambda$ καλεῖται ὁριζοντία ἀσύμπτωτος κάτω καὶ ἀριστερὰ τοῦ ἄξονος τῶν y.

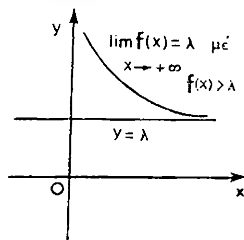
**γ)** Ἐὰν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ καὶ $f(x) < \lambda$ διὰ $x > n$ μὲ $n \epsilon (\alpha, +\infty)$, τότε ἡ $y = \lambda$ καλεῖται ὁριζοντία ἀσύμπτωτος ἄνω καὶ δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y.

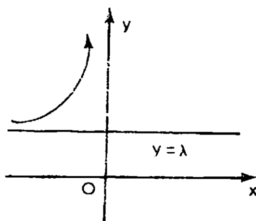
**δ)** Ἐὰν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ καὶ $f(x) < \lambda$ διὰ $x < n$, ὅπου $n \epsilon (-\infty, \alpha)$, τότε ἡ $y = \lambda$ καλεῖται ὁριζοντία ἀσύμπτωτος ἄνω καὶ ἀριστερὰ τοῦ ἄξονος τῶν y.

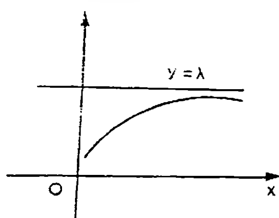
**ε)** Ἐὰν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \epsilon R$ καὶ $f(x) > \lambda$ διὰ $x > n$, $n \epsilon (\alpha, +\infty)$ καὶ διὰ $x < n'$, $n' \epsilon (-\infty, \alpha)$, τότε ἡ $y = \lambda$ καλεῖται ὁριζοντία ἀσύμπτωτος κάτω καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν y.

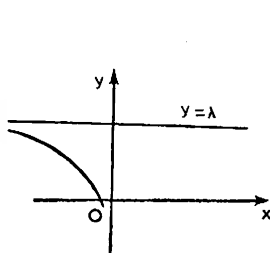
**στ)** Ἐὰν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \in R$ καὶ $f(x) < \lambda$ διὰ $x > n$, $n \in (\alpha, +\infty)$ καὶ διὰ $x < n'$, $n' \in (-\infty, \alpha)$ ,τότε ἡ $y = \lambda$ καλεῖται ὁριζοντία ἀσύμπτωτος ἄνω καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν y.

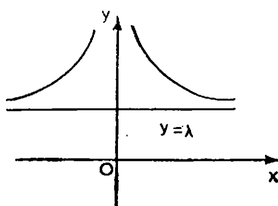
Τὰ ἀνωτέρω κατὰ σειρὰν ἀποδίδονται γραφικῶς ὡς κάτωθι.

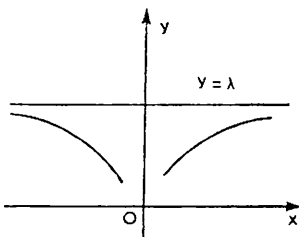


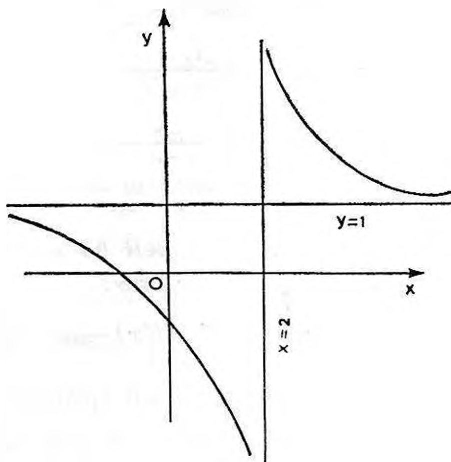




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ὑπάρχουν ὁριζόντιοι ἀσύμπτωτοι αὐτῆς.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν προφανῶς $\mathscr{D}(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, καὶ ἐξετάζομεν τώρα



τὰ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Ἐπειδὴ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$, ἕπεται ὅτι ἡ $y = 1$ εἶναι μία ὁριζοντία ἀσύμπτωτος τῆς f. Ἐπειδὴ ἐπίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ καὶ πάλιν ἡ $y = 1$ εἶναι μία ὁριζοντία ἀσύμπτωτος τῆς f.

Θὰ καθορίσωμεν τώρα τὴν ἀκριβῆ θέσιν αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ διάγραμμα τῆς f.

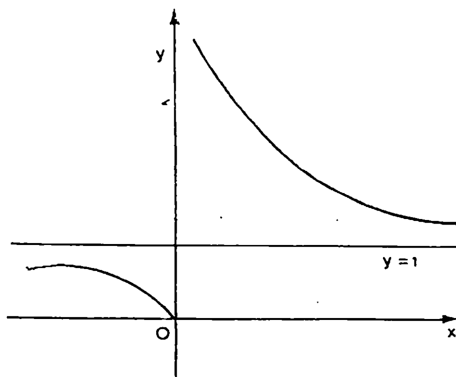
Ἔχομεν $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-2+3}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$ καὶ εἶναι $1 + \dfrac{3}{x-2} > 1$

ἐὰν $x > 2$ καὶ $1 + \dfrac{3}{x-2} < 1$ ἂν $x < 2$.

Συνεπῶς ἡ $y = 1$ εἶναι ὁριζοντία κάτω, ἀσύμπτωτος τῆς f δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y καὶ ὁριζοντία ἄνω ἀριστερὰ τοῦ ἄξονος τῶν y (ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ σχήματος).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Ὑπάρχουν ὁριζόντιοι ἀσύμπτωτοι;**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Εἶναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^0 = 1$ καὶ ἑπομένως ἡ $y = 1$ εἶναι ὁριζοντία ἀσύμπτωτος τῆς f. Ἐπειδὴ διὰ $x < 0$ εἶναι $e^{\frac{1}{x}} > 1$ καὶ διὰ $x < 0$ εἶναι $e^{\frac{1}{x}} < 1$, θὰ ἔχωμεν τὸ ἀκόλουθον σχῆμα.




**Ὁρισμὸς 4.** *Μία εὐθεῖα $y = ax+\beta/a$, $\beta \in R$ θὰ καλῆται πλαγία ἀσύμπτωτος τῆς συναρτήσεως f, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν:*

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax - \beta) = 0 \quad \text{ἢ} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax - \beta] = 0$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν σταθερῶν α, β∈R ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ax - \beta] = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = \beta$.

Ἄρα $$\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x] \qquad (1)$$

Ἐπειδή, ὅταν $x \to +\infty$, θὰ ἔχωμεν ὅτι: $\frac{1}{x} \to 0$, ἐπομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - \alpha\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta}{x} = 0\ (\beta\epsilon R), \text{ ὁπότε: } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha.$$

Ἄρα: $$\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1), ἀφοῦ προσδιορίσωμεν τὸ α ἐκ τῆς (2), εὑρίσκομεν τὸ β.

Ὁμοίως ἂν $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - \alpha x - \beta] = 0$, ὁπότε:

$$\alpha = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - \alpha x].$$

**Παρατήρησις 1.** Ἐὰν ἀπὸ τὰ ὅρια, $\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ καὶ $\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x]$ (ὁμοίως καὶ διὰ $x \to -\infty$) ἕνα τουλάχιστον δὲν ὑπάρχει, τότε δὲν ὑπάρχει καὶ πλαγία ἀσύμπτωτος τῆς f.

**Παρατήρησις 2.** Ἡ πλαγία ἀσύμπτωτος τῆς f θὰ εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ διαγράμματος αὐτῆς, ὅταν $f(x) > \alpha x + \beta\ \forall x\epsilon R: |x| >$ ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ θ καὶ ἄνωθεν τοῦ διαγράμματος τῆς f, ἂν $f(x) < \alpha x + \beta\ \forall x\epsilon R: |x| > \theta$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Εὕρετε τὰς πλαγίας ἀσυμπτώτους τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν.**

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R - \{0\}$ καὶ ἐπομένως $+\infty$ καὶ $-\infty$ σημεῖα συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$. Ἀναζητοῦμεν τώρα τά: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ καὶ $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Ἔχομεν: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{1}{2}$ ἄρα: $\alpha = \frac{1}{2}$.

Καὶ ἐπίσης: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{1}{2}$ ἄρα καὶ πάλιν $\alpha = \frac{1}{2}$.

Ἀκολούθως ἀναζητοῦμεν τά: $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x]$ καὶ $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - \alpha x]$.

Ἔχομεν: $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$ καὶ $\lim[f(x) - x\alpha] = 0$, ἄρα δι' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις $\beta = 0$.

Κατόπιν τούτου ἡ εὐθεῖα $y = \alpha x + \beta = \frac{1}{2}x + 0 = \frac{1}{2}x$ εἶναι πλαγία ἀσύμπτωτος τῆς f.

Ἐπειδὴ τώρα: $f(x) - (\alpha x + \beta) = \frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$.

Θὰ ἔχωμεν: $f(x) > \alpha x+\beta$ ἂν $x > 0$, ὁπότε ἡ ἀσύμπτωτος τῆς f διὰ $x > 0$ εἶναι κάτω τοῦ διαγράμματος αὐτῆς, ἐνῶ διὰ $x < 0$, εἶναι ὑπεράνω τοῦ διαγράμματος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}$.**

**Ἐξετάσατε ἂν ὑπάρχουν ἀσύμπτωτοι αὐτῆς κατακόρυφοι, ὁριζόντιοι, πλάγιαι.**

**Ἀπάντησις.** Πρέπει $(x^3+1)(x+3) \geqq 0$ $(x \neq -3)$ $\Longleftrightarrow$ $(x+1)(x+3) \geqq 0$.

Ἑπομένως $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -3) \cup [-1, +\infty)$ καὶ τὰ σημεῖα $-3, -1, +\infty, -\infty$ σημεῖα συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$.

1) Ἐξετάζομεν ἂν ἔχῃ κατακορύφους ἀσυμπτώτους. Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι συνεχὴς ἐν $\mathcal{D}(f)$, θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) = \sqrt{\frac{\xi^3+1}{\xi+3}} \neq \pm\infty, \text{ ἂν } \xi \neq -3 \text{ καὶ μὲ } \xi \in \mathcal{D}(f).$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει εὐθεῖα $x = \xi$ μὲ $\xi \in \mathcal{D}(f)$, ἡ ὁποία νὰ εἶναι κατακόρυφος ἀσύμπτωτος τῆς f.

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν εὐθεῖαν $x = -3$. Ἐπειδὴ ἡ f δὲν ὁρίζεται δεξιὰ τοῦ $-3$, θὰ ἐξετάσωμεν τὸ $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x)$.

Ἔχομεν: $$\lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} \sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} = \sqrt{\lim_{x\to -3-0} \frac{x^3+1}{x+3}} = +\infty,$$

ὁπότε ἡ $x = -3$ εἶναι κατακόρυφος ἀσύμπτωτος κειμένη δεξιὰ τοῦ διαγράμματος τῆς f.

Ἐξετάζομεν τώρα ἂν ὑπάρχουν ὁριζόντιοι ἀσύμπτωτοι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἐξετάσωμεν ἂν ὑπάρχουν τὰ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ καὶ εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοί.

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}} = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}} =$
$= +\infty$, ἑπομένως δὲν ὑπάρχει ὁριζοντία ἀσύμπτωτος.

Ὡς πρὸς τὴν ὕπαρξιν πλαγίων ἀσυμπτώτων ἐξετάζομεν τά:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x^3+3x^2}} = +1$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$
$= -\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x^3+3x^2}} = -1.$

Κατόπιν τούτου εἶναι: $\alpha = 1$ διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ $\alpha = -1$ διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Ἀκολούθως ἐλέγχομεν ἂν ὑπάρχουν τά:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x] \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - \alpha x]$$

Διὰ $\alpha = 1$ θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^3+1}{x+3} - x^2}{\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}} + x} =$$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2+1}{\sqrt{(x+3)(x^3+1)} + x(x+3)} = -\dfrac{3}{2}$, ὁπότε ἡ εὐθεῖα $y = \alpha x + \beta = x - \dfrac{3}{2}$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος.

Ἐπίσης διὰ $\alpha = -1$ θὰ ἔχωμεν:

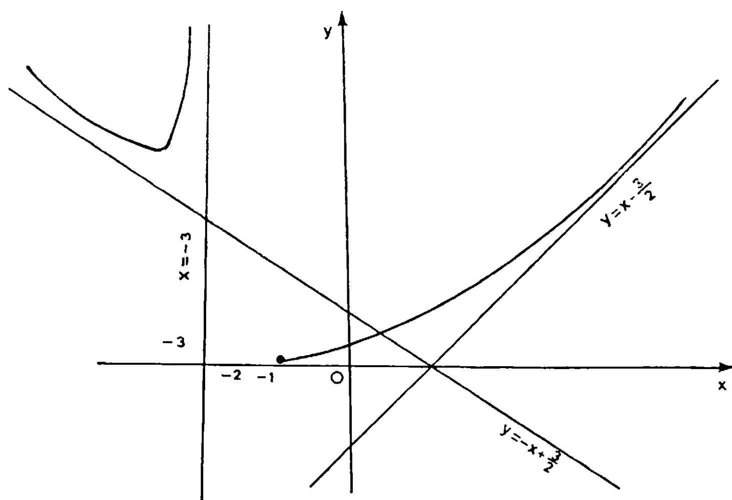
$$\lim_{x \to -\infty}[f(x)+x] = \lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x^3+1}{x+3} - x^2}{\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}} - x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+1-x^3-3x^2}{(x+3)\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}} - x(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3+\dfrac{1}{x^2}}{-\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\sqrt{\dfrac{x+\dfrac{1}{x^2}}{x+3}} - 1 - \dfrac{3}{x}} = \frac{3}{2}$$

ὁπότε καὶ ἡ εὐθεῖα $y = -x + \dfrac{3}{2}$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος.

Ἐπειδὴ διὰ $x > -1$ εἶναι $f(x) > x - \dfrac{3}{2}$ ἡ ἀσύμπτωτος $y = x - \dfrac{3}{2}$ κεῖται κάτωθεν τοῦ διαγράμματος τῆς f καὶ ἐπειδὴ διὰ $x < -3$ εἶναι $f(x) > -x + \dfrac{3}{2}$ ἡ ἀσύμπτωτος $y = -x + \dfrac{3}{2}$ κεῖται καὶ αὐτὴ κάτωθεν τοῦ διαγράμματος τῆς f.




Γραφικῶς ἔχομεν τὸ ἄνω σχῆμα.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $y = -x + \dfrac{3}{2}$ τέμνει τὸ διάγραμμα τῆς f εἰς τὸ σημεῖον

$x = \frac{23}{27}$, διότι ἡ ἐξίσωσις: $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} = -x + \frac{3}{2}$ ἔχει λύσιν ἐν $\mathscr{D}(f)$. Ἐνῶ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} = x - \frac{3}{2}$ δὲν ἔχει λύσιν ἐν $\mathscr{D}(f)$.

Ιδε κ' παράδειγμα 60 σελ 159

## 12.34 Ἄρσις ἀοριστίας καὶ κανόνες τοῦ de l'Hospital

Τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν μορφῶν:

α) $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ μὲ $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\xi} f_2(x) = 0$, ἤτοι τοῦ τύπου $\left(\frac{0}{0}\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ μὲ $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\xi} f_2(x) = +\infty$ ἢ $(-\infty)$, ἤτοι τοῦ τύπου $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ ἢ $\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)$.

γ) $\lim\limits_{x\to\xi} [f_1(x).f_2(x)]$ μὲ $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} f_2(x) = +\infty$, ἤτοι τοῦ τύπου $(0.+\infty)$.

δ) $\lim\limits_{x\to\xi} [f_1(x)]^{f_2(x)}$ μὲ $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} f_2(x) = 0$, ἤτοι τοῦ τύπου $(+\infty^0)$ κ.ο.κ. τῶν τύπων $(+\infty) - (+\infty)$, $0^0$, $1^{+\infty}$ καλοῦμεν ἀπροσδιορίστους μορφάς, διότι ἐπὶ τούτου δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν ἀπ' εὐθείας τὰ θεωρήματα τῶν ὁρίων ἐπειδή, ὡς γνωρίζομεν, αἱ ἀντίστοιχοι πράξεις $\frac{0}{0}$, κλπ. δὲν εἶναι ἐπιτρεπταί.

Μερικαὶ προτάσεις ποὺ ἀναφέρομεν κατωτέρω ὑπὸ τὴν ὀνομασία «Κανόνες τοῦ de l' Hospital» μᾶς βοηθοῦν εἰς τὴν ἄρσιν, ὡς λέγομεν, αὐτῶν τῶν ἀοριστιῶν.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡρισμέναι εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $\xi \in R$.**

**Ἐὰν ἰσχύῃ ὅτι:**

**1) Ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \pi(\xi, \varepsilon)$**

**2) $f'_2(\xi) \neq 0$**

**3) $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\xi} f_2(x) = 0$**

**τότε:**

**α) ὁρίζεται τὸ πηλίκον $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ εἰς τὴν περιοχὴν $\pi(\xi, \varepsilon) - \{\xi\}$, καὶ**

**β) ὑπάρχει τὸ $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ καὶ εἶναι $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)}$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon \pi(\xi, \varepsilon)$, ἕπεται, ὅτι αὐταὶ εἶναι συνεχεῖς εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ καὶ τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x \to \xi} f_1(x) = f_1(\xi) \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to \xi} f_2(x) = f_2(\xi).$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως θὰ ἔχωμεν ὅτι: $f_1(\xi) = f_2(\xi) = 0$. Ἐπειδὴ $f'_2(\xi) \neq 0$ θὰ ἔχωμεν: $f'_2(\xi) > 0$ ἢ μόνον $f'_2(\xi) < 0$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι: $f'_2(\xi) > 0$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ $f_2$ εἶναι γνησίως αὔξουσα εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$, δηλαδὴ ὑπάρχει περιοχὴ τοῦ $\xi$ ἢ $\pi(\xi, \varepsilon)$ οὕτως ὥστε: $f_2(x) < f_2(\xi) = 0 \ \forall x \epsilon (\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ $f_2(x) > f_2(\xi) = 0 \ \forall x \epsilon (\xi, \xi + \varepsilon)$ καὶ ἐπομένως εἶναι $f_2(x) \neq 0 \ \forall x \epsilon \pi(\xi, \varepsilon) - \{\xi\}$.

Ὥστε τὸ πηλίκον $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον $\forall x \epsilon \pi(\xi, \varepsilon) - \{\xi\}$.

Ἔστω τώρα ὅτι $f'_2(\xi) < 0$ τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ $f_2$ εἶναι γνησίως φθίνουσα εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \epsilon R$, δηλαδὴ ὑπάρχει περιοχὴ τοῦ $\xi$ ἢ $\pi(\xi, \varepsilon)$ οὕτως ὥστε: $f_2(x) > f_2(\xi) = 0 \ \forall x (\xi - \varepsilon, \xi)$ καὶ $f_2(x) < f_2(\xi) = 0 \ \forall x \epsilon (\xi, \xi + \varepsilon)$ καὶ ἐπομένως εἶναι: $f_2(x) \neq 0 \ \forall x \epsilon \pi(\xi, \varepsilon) - \{\xi\}$ καὶ τὸ πηλίκον $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ καὶ πάλιν εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον $\forall x \epsilon \pi(\xi, \varepsilon) - \{\xi\}$.

Ἐπειδὴ $f_1(\xi) = f_2(\xi) = 0$ θὰ εἶναι:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x) - f_1(\xi)}{f_2(x) - f_2(\xi)} = \lim_{x \to \xi} \frac{\dfrac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi}}{\dfrac{f_2(x) - f_2(\xi)}{x - \xi}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi}}{\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f_2(x) - f_2(\xi)}{x - \xi}} = \frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)}.$$

**Παρατήρησις 1.** Τὸν κανόνα αὐτὸν τοῦ de l' Hospital θὰ ἐφαρμόζωμεν, ὅταν ἔχωμεν ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $\dfrac{0}{0}$.

**Παρατήρησις 2.** Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ ὅταν ἀκόμη αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι ὡρισμέναι εἰς μίαν πλευρικὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $\xi$, δηλαδὴ εἰς τὴν $(\xi - \varepsilon, \xi]$ ἢ $[\xi, \xi + \varepsilon)$ καὶ τότε αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ εἶναι πλευρικαί.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Διὰ τοῦ κανόνος τοῦ de l' Hospital ὑπολογίσατε τὰ ἀκόλουθα ὅρια:**

**α)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 3}$ **β)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(x+1)}{e^x - 1}$

**Ἀπάντησις. α)** Θέτομεν $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ καὶ $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$. Παρατηροῦ-

μεν ότι : $\mathcal{D}(f_1) = R$ καὶ $\mathcal{D}(f_2) = R$. Ἑπομένως ἀμφότεραι εἶναι ὡρισμέναι εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου 1, π.χ. τὴν $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Προφανῶς ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἰς τὴν θέσιν $x = 1$ καὶ εἶναι $f'_2(x) = 2x - 4$ καὶ συνεπῶς $f'_2(1) = -2 \neq 0$. Ἐπίσης εἶναι : $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} f_2(x) = 0$.

Βάσει τούτων πληροῦνται ὅλαι αἱ προϋποθέσεις τῆς προτάσεως καὶ ἑπομένως :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f'_1(1)}{f'_2(1)} = \frac{3.1^2-6.1+2}{2.1-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

β) Θέτομεν : $f_1(x) = \log(x+1)$ καὶ $f_2(x) = e^x - 1$. Εἶναι : $\mathcal{D}(f_1) = (-1, +\infty)$ καὶ $\mathcal{D}(f_2) = R$. Ἀμφότεραι λοιπὸν εἶναι ὡρισμέναι εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ 0 π.χ. τὴν $\pi(0, \varepsilon)$. Αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως $f'_1(x) = \frac{(x+1)'}{1+x} = \frac{1}{1+x}$ καὶ $f'_2(x) = e^x$, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ καὶ μάλιστα $f'_2(0) = e^0 = 1 \neq 0$.

Ἐπίσης εἶναι : $\lim\limits_{x\to 0}\log(1+x) = \log 1 = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = e^0 - 1 = 0$, ἤτοι : $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$. Ὥστε ὑπάρχουν ὅλαι αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἰσχὺν τῆς προτάσεως καὶ συνεπῶς τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος.

Ἔχομεν : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f'_1(0)}{f'_2(0)} = \frac{1}{1} = 1.$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$ μὲ τὸν κανόνα τοῦ de l' Hospital.**

**Ἀπάντησις.** Θέτομεν $f_1(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}$ καὶ $f_2(x) = x+2x^2$. Ἡ πρώτη συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ καὶ ἡ δευτέρα $\forall x \in R$, καὶ ἑπομένως εἶναι ἀμφότεραι ὡρισμέναι εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ μηδενός.

Αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως :

$$f'_1(x) = (\sqrt{1+2x})' - (\sqrt{1+3x})' = \frac{(1+2x)'}{2\sqrt{1+2x}} - \frac{(1+3x)'}{2\sqrt{1+3x}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} - \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

καὶ $f'_2(x) = 1+4x$ καὶ ὑπάρχουν εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ μηδενὸς καὶ εἶναι :

$$f'_1(0) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \text{ καὶ } f'_2(0) = 1 \neq 0.$$

Ἐπὶ πλέον $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1 - 1 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$.

Ὑπάρχουν συνεπῶς αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος καὶ ἔχομεν:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f'_1(0)}{f'_2(0)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡισμέναι εἰς ἕνα διάστημα $(\alpha, \beta)$.**

**Ἐὰν ἰσχύῃ ὅτι :**

**1) ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x \in (\alpha, \beta)$**

**2) $f'_2(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$**

**3)** $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\alpha+0} f_2(x) = 0$

**4)** $\lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lambda\epsilon R$ **ἢ** $+\infty$ **ἢ** $-\infty$ **τότε :**

$$\lim_{x\to\alpha+0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\alpha+0} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lambda\epsilon R \text{ ἢ } +\infty \text{ ἢ } -\infty.$$

**Ἀπόδειξις.** Αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ βάσει τῆς (3) πληροῦν τὰς συνθήκας : $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\alpha+0} f_2(x) = 0$ καὶ ὅμως δὲν ὁρίζονται εἰς τὴν θέσιν $x = \alpha$. Ἐὰν θέσωμεν $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$, τότε καθιστῶμεν αὐτὰς συνεχεῖς δεξιὰ τοῦ α καὶ ἑπομένως ἂν x εἶναι ἕνα στοιχεῖον τοῦ (α, β) τότε ἀμφότεραι εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ [α, x]. Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως παραγωγίζονται $\forall x\epsilon(\alpha, \beta)$, ἑπομένως θὰ παραγωγίζωνται καὶ $\forall x\epsilon(\alpha, x)$. Διὰ τὴν συνάρτησιν ὅμως $f_2$ ἰσχύει $f_2(\xi) \neq 0$ $\forall \xi\epsilon(\alpha, x)$, διότι ἄλλως ἂν ὑπῆρχε $\xi\epsilon(\alpha, x)$ οὕτως ὥστε $f_2(\xi) = 0$, τότε ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle, ἐπειδὴ $f_2(\alpha) = 0$ καὶ $f_2(\xi) = 0$, θὰ ὑπῆρχε διὰ τὴν $f_2$ ἕνα τουλάχιστον $\xi_1$ μὲ $\alpha < \xi_1 < \xi$ οὕτως ὥστε $f'_2(\xi_1) = 0$, ἄτοπον ἀφοῦ $f'_2(x) \neq 0$ $\forall x\epsilon(\alpha, \beta)$.

Συνεπῶς εἶναι $f(\xi) \neq 0$ $\forall \xi\epsilon(\alpha, x)$.

Ἀφοῦ συμβαίνει αὐτό, τὸ πηλίκον $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ εἶναι παντοῦ ὡρισμένον ἐν (α, x), ὅπου $x\epsilon(\alpha, \beta)$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι διὰ τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ [α, x] πληροῦνται ὅλαι αἱ προϋποθέσεις τοῦ γενικωτέρου θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ὁπότε θὰ ὑπάρχῃ $\xi_1\epsilon(\alpha, x)$ οὕτως ὥστε :

$$\frac{f_1(x) - f_1(\alpha)}{f_2(x) - f_2(\alpha)} = \frac{f'_1(\xi_1)}{f'_2(\xi_1)} \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f'_1(\xi_1)}{f'_2(\xi_1)}$$

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι $\lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f'_1(x)}{f'_2(x)}$.

Θεωροῦμεν πρὸς τοῦτο τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $x_\nu | \nu\epsilon N$ ἀπὸ τὸ (α, β) μὲ $x_\nu \to \alpha+0$. Προφανῶς εἰς κάθε ἀπὸ τὰ διαστήματα $(\alpha, x_1), (\alpha, x_2), \ldots, (\alpha, x_\nu), \ldots$ θὰ ὑπάρχῃ, κατὰ τὰ προηγούμενα, καὶ ἕνα $\xi_\nu | \nu = 1, 2, 3, \ldots$ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι : $\dfrac{f_1(x_\nu)}{f_2(x_\nu)} = \dfrac{f'_1(\xi_\nu)}{f'_2(\xi_\nu)} \mid \nu = 1, 2, \ldots$

Ἀλλὰ $\alpha < \xi_\nu < x_\nu$ $\forall \nu\epsilon N$ καὶ $x_\nu \to \alpha+0$, ὁπότε τότε καὶ $\xi_\nu \to \alpha+0$.

Ὥστε : $\lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f_1(x_\nu)}{f_2(x_\nu)} = \lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{\xi_\nu\to\alpha+0} \dfrac{f'_1(\xi^\nu)}{f'_2(\xi_\nu)} = \lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f'_1(x)}{f'_2(x)} =$
$= \lambda\epsilon R$ ἢ $+\infty$ ἢ $-\infty$.

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν ἂν $x \to \beta - 0$ καθὼς καὶ ὅταν $x \to \xi + 0$ καὶ $x \to \xi - 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Εὕρετε τὰ ἀκόλουθα ὅρια:**

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1-2e^{x-1}}{(x-1)^3}$

**Ἀπάντησις.** α) Θέτομεν $f_1(x) = \text{συν}x - 1$ καὶ $f_2(x) = x^2$. Αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι παντοῦ ὡρισμέναι ἐν R. Αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$f'_1(x) = \text{ημ}x \text{ καὶ } f_2(x) = 2x \text{ καὶ ἰσχύουν:}$$

1) Ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x \in R$

2) $f'_2(x) \neq 0 \ \forall x \in R - \{0\}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$

(Δηλαδὴ ἐδῶ ἔχομεν ἀμφίπλευρα ὅρια τοῦ $x \to 0+0$ καὶ $x \to 0-0$) καὶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'_1(x)}{f'_2(x)} =$

$= -\dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τοῦ β΄ κανόνος τοῦ de l' Hospital, θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = -\frac{1}{2}.$$

β) Θέτομεν $f_1(x) = x^2+1-2e^{x-1}$ καὶ $f_2(x) = (x-1)^3$. Αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι παντοῦ ὡρισμέναι ἐν R. Αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$f'_1(x) = 2x - 2e^{x-1}(x-1)' = 2x - 2e^{x-1}$$

καὶ $f'_2(x) = 3(x-1)^2$ καὶ ἰσχύουν.

1) Ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x \in R$

2) Εἶναι $f'_2(x) \neq 0 \ \forall x \in R - \{1\}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} f_2(x)$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2e^{x-1}}{3(x-1)^2} = -\dfrac{1}{3}$, διότι διὰ τὰς συναρτήσεις $f'_1(x) = 2x - 2e^{x-1}$ καὶ $f'_2(x) = 3(x-1)^2$ ἰσχύουν καὶ πάλιν, ὅτι καὶ διὰ τὰς $f_1$ καὶ $f_2$ καὶ ἑπομένως:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f''_1(x)}{f''_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2-2e^{x-1}}{6(x-1)}$$

καὶ πάλιν διὰ τὰς $f_1''$ καὶ $f''_2$, ὅτε τελικῶς:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f''_1(x)}{f''_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'''_1(x)}{f'''_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2e^{x-1}}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἐγένετο συνεχὴς ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος, ἀφοῦ ἑκάστοτε ἰσχύουν ὅλαι αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{εφ}x}{x^2}$ μὲ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.**

**Ἀπάντησις.** Θέτομεν $f_1(x) = \text{εφ}x$ καὶ $f_2(x) = x^2$. Αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι ὡρισμέναι $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως: $f'_1(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$ καὶ $f'_2(x) = 2x$ καὶ ἰσχύουν:

1) Ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

2) Εἶναι $f'_2(x) \neq 0$ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} f_2(x)$

4) $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{f_1'(x)}{f'_2(x)} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}}{2x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{2x\sigma\upsilon\nu^2 x} = +\infty$

Συνεπῶς ἰσχύουν ὅλαι αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος καὶ ἑπομένως: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = +\infty.$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡρισμέναι εἰς ἕνα διάστημα Δ τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$.**

**Ἐὰν ἰσχύῃ ὅτι:**

**1) Ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x \in \Delta$.**

**2) $f'_2(x) \neq 0$ $\forall x \in \Delta$**

**3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$**

**4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lambda \in R$ ἢ $\lambda = \pm\infty$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lambda \in R$ ἢ $\lambda = \pm\infty$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ ὁρίζονται εἰς ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $\alpha > 0$. Ἔστω τώρα $x = \frac{1}{y}$, τότε ἐπειδὴ $x \in (\alpha, +\infty)$ θὰ εἶναι $y \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$.

Ἑπομένως αἱ συναρτήσεις $F_1(y) = f_1\left(\frac{1}{y}\right)$ καὶ $F_2(y) = f_2\left(\frac{1}{y}\right)$ μὲ $\Delta = \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ πληροῦν τὰς προϋποθέσεις τῆς προτάσεως (2), διότι:

1) $F'_1(y) = f'_1\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)$ (σύνθετος συνάρτησις)

$F'_2(y) = f'_2\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)$ $\forall y \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$

2) $F'_2(y) \neq 0$ $\forall y \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right) \iff f'_2\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{y\to 0+0} F_1(y) = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{y\to 0+0} F_2(y) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lim\limits_{y\to 0+0} \dfrac{F'_1(y)}{F'_2(y)} = \lambda \in R$ ἢ $\lambda = \pm\infty$.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{y\to 0+0} \frac{F_1(y)}{F_2(y)} = \lim_{y\to 0+0} \frac{F'_1(y)}{F'_2(y)} = \lambda \in R \text{ ἢ } \lambda = \pm\infty.$$

**Παρατήρησις.** Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ ὅταν αἱ $f_1$, $f_2$ εἶναι ὡρισμέναι εἰς ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty, \alpha)$ μὲ $x \to -\infty$.

Διατυπώσατε καὶ δείξατε τὴν πρότασιν.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Εὕρετε τὸ** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$ **μὲ** $\alpha \in R^+$.

**Ἀπάντησις.** Θέτομεν $f_1(x) = \log\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)$ καὶ $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$. Αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι ὡρισμέναι εἰς ἕνα διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.

Αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$f'_1(x) = \frac{\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)'}{1+\dfrac{\alpha}{x}} = \frac{-\dfrac{\alpha}{x^2}}{1+\dfrac{\alpha}{x}} = \frac{-\alpha}{x(x+\alpha)} \text{ καὶ } f'_2(x) = \frac{-1}{x^2}$$

καὶ εἶναι $f'_2(x) \neq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

Ἔχομεν λοιπὸν ὅτι:

1) Ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x \in (0, +\infty)$

2) $f'_2(x) \neq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \log 1 = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{-\alpha}{x(x+\alpha)}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\alpha}{x(x+\alpha)} = \alpha$

Ὁπότε ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος καὶ συνεπῶς:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \alpha.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Εὕρετε τὸ** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

**Ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου διὰ $\alpha = -1$.**

**Ἀπάντησις.** Θέτομεν $f_1(x) = \log\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ καὶ $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ καὶ αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι παντοῦ ὡρισμέναι εἰς ἕνα διάστημα $\Delta = (1, +\infty)$.

Αἱ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$f'_1(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)'}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x(x-1)} \text{ καὶ } f'_2(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

Ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

1) Ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι αὐτῶν $\forall x\in\Delta$

2) $f'_2(x)\neq 0 \ \forall x\in\Delta$

3) $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\log\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log 1=0=\lim_{x\to+\infty} f'_2(x)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}=-1$

Ὑπάρχουν ὅλαι αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος καὶ ἔχομεν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}=-1.$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡρισμέναι εἰς ἕνα διάστημα Δ τῆς μορφῆς $(\alpha,\xi)$ ἢ $(\xi,\beta)$ ἢ $(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ καὶ ἰσχύει:**

**1) Αἱ $f_1$ καὶ $f_2$ παραγωγίζομται $\forall x\in\Delta$,**

**2) $f'_2(x)\neq 0 \ \forall x\in\Delta$**

**3) $\lim_{x\to\xi} f_1(x)=+\infty$ καὶ $\lim_{x\to\xi} f_2(x)=+\infty$**

**4) $\lim_{x\to\xi}\frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}=\lambda\in R$ ἢ $\lambda=\pm\infty$**

**τότε:**

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}=\lambda\in R \ (\text{ἢ } \pm\infty).$$

Τὴν ἀνωτέρω πρότασιν λαμβάνομεν χωρὶς ἀπόδειξιν. Οἱ ἐνδιαφερόμενοι ἂς ἀνατρέξουν εἰς ἄλλα βοηθήματα πλέον ἐκτεταμένα πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν $\alpha,\beta,\gamma\in R^+$, εὕρετε τό: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\alpha+\beta e^x)}{\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}$.**

**Ἀπάντησις.** Ἐπειδή, ἂν $f_1(x)=\log(\alpha+\beta e^x)$ καὶ $f_2(x)=\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}$, θὰ εἶναι $f'_1(x)=\frac{(\alpha+\beta e^x)'}{\alpha+\beta e^x}=\frac{\beta e^x}{\alpha+\beta e^x}$ καὶ $f'_2(x)=\frac{\beta x+\alpha}{\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}$ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόν λαμβάνομεν: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta e^x\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}{(\alpha+\beta e^x)(\alpha+\beta x)}=\beta\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\alpha+\beta e^x}\cdot$

$$\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}{\alpha+\beta x} = \beta \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(\alpha+\beta e^x)'} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\beta+\frac{2\alpha}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}}{\frac{\alpha}{x}+\beta}$$

$$= \beta \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\beta e^x} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{\beta} = \beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}.$$

## 12. 35 Ειδικαὶ περιπτώσεις ἀοριστίας τῆς μορφῆς $0^0$, $+\infty^0$, $1^{+\infty}$

Γνωρίζομεν, ὅτι ἐὰν ἡ συνάρτησις f εἶναι ὡρισμένη εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ καὶ εἶναι $f(x) > 0$ διὰ κάθε x τῆς περιοχῆς αὐτῆς καὶ ἐπὶ πλέον ὑπάρχουν τὰ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x)$, τότε ἰσχύει:

$$\lim_{x\to\xi} [f(x)^{\varphi(x)}] = [\lim_{x\to\xi} f(x)]^{\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)}$$

Ἀλλὰ ἂν $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = 0$ ἀγόμεθα εἰς τὴν μορφὴν $0^0$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει νόημα ἀριθμοῦ.

Ὁμοίως ἂν $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 1$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$ ἐπίσης ἀγόμεθα εἰς τὴν μορφὴν $1^{+\infty}$ ἢ $1^{-\infty}$ ποὺ καὶ πάλιν δὲν ἔχει νόημα ἀριθμοῦ.

Ἐάν, τέλος, $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = 0$ ἀγόμεθα εἰς τὴν μορφὴν $(+\infty)^0$, ἡ ὁποία καὶ ἐδῶ δὲν ἔχει νόημα ἀριθμοῦ.

Διὰ νὰ ἄρωμεν τὴν ἀοριστίαν εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

**α) Ἀοριστία τῆς μορφῆς $0^0$**

Ἔστω ὅτι $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ μὲ $f(x) > 0$ $\forall x \epsilon \pi(\xi)$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 0$ καθὼς καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = 0$.

Ἔχομεν: $\log y = \varphi(x)\log f(x) \Rightarrow y = e^{\varphi(x)\log f(x)}$ καὶ ἑπομένως:

$\lim\limits_{x\to\xi} [f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)\log f(x)}$ (ἀφοῦ ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις εἶναι συνεχής).

Ὥστε ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x)\log f(x)$.

Ἔχομεν ὅμως ὅτι $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} \log f(x) = -\infty$, διότι, ἀφοῦ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 0$ καὶ $f(x) > 0$, ἕπεται, ὅτι τὸ f(x) τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐκ τιμῶν θετικῶν, ὁπότε λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως θὰ ἔχωμεν: $\lim\limits_{x\to\xi} \log f(x) = \log(\lim\limits_{x\to\xi} f(x)] = -\infty$.

Τοιουτοτρόπως ἀγόμεθα εἰς ἀοριστίαν γνωστὴν τῆς μορφῆς $0.(-\infty)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ** $\lim\limits_{x\to 0+0}(\eta\mu x)^x$.

**Ἀπάντησις.** Ἐδῶ $f(x)=\eta\mu x$ καὶ $\varphi(x)=x$ καὶ εἶναι $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0$ καὶ $\lim\limits_{x\to 0+0}\varphi(x)=0$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $0^0$.

Κατόπιν τούτου θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to 0+0}(\eta\mu x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(x\log\eta\mu x)}$$

Ἐπειδὴ τὸ $\lim\limits_{x\to 0+0}(x\log\eta\mu x)$ εἶναι τῆς μορφῆς $0(-\infty)$ θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Εἶναι $\lim\limits_{x\to 0+0}(x\log\eta\mu x) = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\log\eta\mu x}{\dfrac{1}{x}} = -\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{-\log\eta\mu x}{\dfrac{1}{x}}$ $\left(\text{μορφὴ } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$ ἄρα:

$\lim\limits_{x\to 0+0}(x\log\eta\mu x) = -\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\dfrac{-(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x^2}{\varepsilon\varphi x} = -\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{(x^2)'}{(\varepsilon\varphi x)'}$ (διότι εἶναι τῆς μορφῆς $\left.\dfrac{0}{0}\right) = -\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{2x}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = -\lim\limits_{x\to 0+0}(2x\sigma\upsilon\nu^2 x) = 0.$

Ἑπομένως καὶ $\lim\limits_{x\to 0+0}(\eta\mu x)^x = e^0 = 1$.

### β) Ἀοριστία τῆς μορφῆς $+\infty^0$

Ἔστω ὅτι $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ μὲ $f(x)>0$ $\forall x\epsilon\pi(\xi)$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=+\infty$ καθὼς καὶ $\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)=0$, ὁπότε ἔχομεν ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $+\infty^0$.

Εἶναι: $\lim\limits_{x\to\xi} y = \lim\limits_{x\to\xi}[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)\log f(x)}$, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)\log f(x)$, ποὺ εἶναι τῆς μορφῆς $0\cdot(+\infty)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εὕρετε τὸ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς εἶναι τῆς μορφῆς $(+\infty^0)$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log x}$ καὶ ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\log x$ τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι τῆς μορφῆς $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Εἶναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ καὶ ἄρα $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

**γ) Ἀοριστία τῆς μορφῆς $1^{+\infty}$ ἢ $1^{-\infty}$**

Ἐὰν $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ μὲ $f(x)>0$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 1$, ἐνῷ $\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x) = +\infty$, τότε ἔχομεν ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $1^{+\infty}$ καὶ τότε ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως ἔχομεν, ὅτι : $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)\log f(x)}$ καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ $\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)\log f(x)$, ποὺ εἶναι τῆς μορφῆς $0.(+\infty)$. Ὁμοία ἐργασία ἂν εἶναι τῆς μορφῆς $1^{-\infty}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Εὕρετε τὸ $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

**Ἀπάντησις.** Εἶναι φανερόν, ὅτι ἂν $x \to 1+0$, τότε ἔχομεν ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $1^{+\infty}$ καὶ ἂν $x \to 1-0$ ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $1^{-\infty}$.

Θὰ ἔχωμεν: $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\log x}$ καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$, ποὺ προφανῶς εἶναι τῆς μορφῆς : $\frac{0}{0}$. Τότε ὅμως θὰ ἔχωμεν : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$, ἄρα καὶ $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

**δ) Ἀοριστία τῆς μορφῆς $0.(\pm\infty)$**

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f = f_1.f_2$ καὶ ζητοῦμεν τὸ $\lim\limits_{x\to\xi} f = \lim\limits_{x\to\xi}(f_1.f_2)$.

Γνωρίζομεν, ὅτι $\lim\limits_{x\to\xi}(f_1f_2) = \lim\limits_{x\to\xi} f_1 . \lim\limits_{x\to\xi} f_2$. Ἐὰν ὅμως $\lim\limits_{x\to\xi} f_1 = 0$ καὶ $\lim\limits_{x\to\xi} f_2(x) =$ $= +\infty$ ἢ $-\infty$ (ὡς εἴδωμεν εἰς τὴν θεωρίαν συγκλίσεως), τότε δὲν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἄνω κανόνα ἐπειδὴ τὸ $0(\pm\infty)$ δὲν ἔχει νόημα ἀριθμοῦ. Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ἂν ἡ $f_2$ εἶναι ὡρισμένη εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ, τότε ὑπάρχει μία περιοχὴ τοῦ ξ ἡ ὁποία περιέχεται εἰς τὴν πρώτην καὶ ἰσχύει $f_2 \neq 0$ $\forall x$ τῆς περιοχῆς αὐτῆς. Αὐτὸ ὅμως μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον $f_1.f_2$ ὑπὸ τὴν μορφὴν $f_1.f_2 = \frac{f_1}{\frac{1}{f_2}}$.

Ἐπειδὴ ὅμως τοῦ $x \to \xi$ τὸ $\lim\limits_{x\to\xi} f_2 = \pm\infty$, θὰ ἔχωμεν $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{1}{f_2} = 0$ καὶ ἑπομένως ἀγόμεθα εἰς τὴν μορφὴν ἀοριστίας τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$.

Ἐννοεῖται ὅτι διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος ἄρσεως ἀοριστίας τῆς μορφῆς $\frac{0}{0}$, θὰ πρέπει νὰ ἰσχύουν διὰ τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $\frac{1}{f_2}$, αἱ προϋποθέσεις ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι ἐπιτρέπουν τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος αὐτοῦ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Εὕρετε τὸ $\lim\limits_{x\to 0}(x\sigma\varphi x)$.

**Ἀπάντησις.** Γνωρίζομεν, ὅτι $\lim\limits_{x\to 0+0}\sigma\varphi(x) = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to 0-0}\sigma\varphi x = -\infty$ καὶ ἐπομένως ἔχομεν ἀοριστίαν τῶν μορφῶν $0(+\infty)$ ἢ $0\ (-\infty)$.

Ἐπειδὴ $\sigma\varphi x = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}$ $\forall x \in R - \{0\}$ θὰ ἔχωμεν: $\lim\limits_{x\to 0}(x\sigma\varphi x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\varepsilon\varphi x}$ καὶ τοιουτοτρόπως ἔχομεν ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $\dfrac{0}{0}$.

Ἀλλὰ διὰ τὰς συναρτήσεις $f_1(x) = x$ καὶ $f_2(x) = \varepsilon\varphi x$ ἰσχύουν ὅλαι αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος ἀοριστίας τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$.

Ἑπομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\varepsilon\varphi x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, ὁπότε καὶ $\lim\limits_{x\to 0}(x\sigma\varphi x) = 1$.

**Παρατήρησις.** Εἶναι δυνατὸν θέτοντες $f_1$ τὸ $\dfrac{1}{f_1}$ νὰ ἀναχθῶμεν εἰς τὴν μορφὴν $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Εὕρετε τὸ $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sqrt{x}\ \log x)$.

**Ἀπάντησις.** Προφανῶς ἔχομεν ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $0.(-\infty)$. Γράφομεν τὸ γινόμενον $\sqrt{x}\ \log x$ ὑπὸ τὴν μορφήν: $\dfrac{\log x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ καὶ θὰ ἔχωμεν τώρα ἀοριστίαν τῆς μορφῆς $\dfrac{-\infty}{+\infty} = -\dfrac{+\infty}{+\infty}$, ὁπότε ἐφαρμόζομεν τὰ γνωστά, ἤτοι:

$$\lim_{x\to 0+0}(\sqrt{x}\log x) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = -\lim_{x\to 0+0}\frac{-\log x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = -\lim_{x\to 0+0}\frac{-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0+0} 2\sqrt{x} = 0.$$

## 12. 36 Μελέτη συναρτήσεως καὶ διάγραμμα αὐτῆς

Μὲ τὴν βοήθειαν ὅλων τῶν προηγουμένων τὰ ὁποῖα ἐμάθαμεν ἕως ἐδῶ εἶναι τώρα δυνατὸν νὰ μελετήσωμεν λεπτομερῶς τὴν συμπεριφορὰν μιᾶς συναρτήσεως ἀπὸ σημείου σὲ σημεῖον (οὕτως εἰπεῖν) τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

Καταφαίνεται τοιουτοτρόπως ἡ μεγάλη χρησιμότης τῶν παραγώγων εἰς τὴν μελέτην μιᾶς συναρτήσεως.

Βεβαίως ἀπαιτεῖται μεγάλη προσοχὴ κατὰ τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας αὐτῆς, ὥστε νὰ μὴ ὑποπίπτωμεν εἰς σφάλματα, ἂν καὶ διὰ τοῦ διαγράμματος

τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν μελέτην αὐτὴν γίνεται φανερόν, ἂν κάποιο «σημεῖον» τῆς ἐργασίας μας δὲν ἔχει πάει καλά. Τοῦτο βεβαίως, δὲν εἶναι καὶ κάτι τὸ ἀπολύτως ἀσφαλές.

Ἡ πορεία τὴν ὁποίαν ἀκολουθοῦμεν διὰ τὴν μελέτην μιᾶς συναρτήσεως γίνεται ὡς ἑξῆς.

**Ἐργασία πρώτη.** Εὑρίσκομεν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ἐφ᾽ ὅσον ἐννοεῖται δὲν δίδεται τοῦτο. Διότι εἶναι δυνατὸν νὰ θέλωμεν νὰ μελετήσωμεν μίαν συνάρτησιν μόνον εἰς ἕνα ὑποσύνολον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

**Ἐργασία δευτέρα.** Εὑρίσκομεν τὰς ἀσυμπτώτους (ἐφ᾽ ὅσον ὑπάρχουν) τοῦ διαγράμματος τῆς συναρτήσεως.

Πρὸς τοῦτο ἀναζητοῦμεν.

α) Τὰς κατακορύφους ἀσυμπτώτους δηλαδὴ ἂν ὑπάρχουν τὰ $\lim\limits_{x\to\xi+0} f(x)$ καὶ εἶναι ταῦτα $\pm\infty$. Τότε ἡ $x=\xi$ εἶναι μία κατακόρυφος ἀσύμπτωτος. (Βλέπετε διὰ λεπτομερείας τὴν ἀντίστοιχον παράγραφον).

β) Τὰς ὁριζοντίας ἀσυμπτώτους, δηλαδὴ ἂν ὑπάρχουν τὰ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in R$. Τότε ἡ $y=\lambda$ εἶναι μία ὁριζοντία ἀσύμπτωτος.

γ) Τὰς πλαγίας ἀσυμπτώτους, δηλαδὴ ἂν ὑπάρχουν τὰ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x] = \beta$, ἐννοεῖται χωριστὰ διὰ $x \to +\infty$ καὶ $x \to -\infty$, ὁπότε ἡ εὐθεῖα $y=\alpha x+\beta$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος.

(Λεπτομέρειαι εἰς τὴν ἀντίστοιχον παράγραφον).

Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$ δὲν ὑπάρχει κατακόρυφος ἀσύμπτωτος. Ἐάν ἡ συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ασύμπτωτοι δέν υπάρχουν.

**Ἐργασία τρίτη.** Εὑρίσκομεν εἰς ποῖα σημεῖα ἡ συνάρτησις εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιάζῃ ἀκρότατα.

Τὰ σημεῖα αὐτὰ τὰ ἀναζητῶμεν:

α) Μεταξὺ τῶν σημείων, ὅπου ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει παράγωγον.

β) Μεταξὺ τῶν σημείων, ὅπου μηδενίζεται ἡ πρώτη παράγωγος.

Διὰ τὴν περίπτωσιν (α) θὰ πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀκροτάτου, ἐνῷ διὰ τὴν περίπτωσιν (β) ἐξετάζομεν τὸ πρόσημον τῆς πρώτης παραγώγου ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου καὶ ἐφ᾽ ὅσον ἔχομεν ἀλλαγὴν προσήμου, ἔχομεν ἐκεῖ καὶ ἀκρότατον. Τὴν περίπτωσιν (β) δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν τὸ πρόσημον τῆς δευτέρας παραγώγου εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ ἂν ἡ δευτέρα παράγωγος εἰς τὸ

σημεῖον αὐτὸ εἶναι θετικὴ ἔχομεν ἐλάχιστον, ἂν δὲ ἀρνητική, ἔχομεν μέγιστον.

Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ συμβαίνῃ νὰ μηδενίζεται καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ἡ δευτέρα παράγωγος ἀλλάσσῃ πρόσημον, τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι σημεῖον καμπῆς, ἐνῶ ἂν δὲν ἀλλάσσῃ πρόσημον, εἶναι σημεῖον ἀκροτάτου.

**Ἐργασία τετάρτη.** Εὑρίσκομεν τὰ διαστήματα μονοτονίας τῆς συναρτήσεως, δηλαδὴ τὰ διαστήματα ἐντὸς τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν διαστημάτων αὐτῶν μελετῶμεν τὸ πρόσημον τῆς πρώτης παραγώγου.

Γνωρίζομεν ὅτι ἐὰν ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι θετικὴ εἰς ἕνα διάστημα, ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα εἰς αὐτὸ γνησίως καὶ ἂν ἀρνητική, ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα γνησίως.

**Ἐργασία πέμπτη.** Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα καμπῆς τοῦ διαγράμματος τῆς συναρτήσεως. Θὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὰ μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς δευτέρας παραγώγου.

Ἀπὸ τὰς ρίζας αὐτὰς σημεῖον καμπῆς εἶναι ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον ἡ δευτέρα παράγωγος ἀλλάσσει πρόσημον ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν.

**Ἐργασία ἕκτη.** Εὑρίσκομεν εἰς ποῖα διαστήματα ἡ συνάρτησις εἶναι κυρτὴ καὶ εἰς ποῖα εἶναι κοίλη. Γνωρίζομεν, ὅτι αὐτὸ προκύπτει ἀπὸ τὸ πρόσημον τῆς δευτέρας παραγώγου. Ἐὰν αὕτη εἶναι θετικὴ εἰς ἕνα διάστημα, τότε ἡ συνάρτησις εἰς αὐτὸ εἶναι κυρτή, ἐνῶ ἂν εἶναι ἀρνητικὴ εἶναι εἰς αὐτὸ κοίλη.

**Ἐργασία ἑβδόμη.** Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x (ἢ ἂν χρειάζεται καὶ τὸν ἄξονα τῶν y). Αὐτὰ εἶναι τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα μηδενίζεται ἡ συνάρτησις. Ἐπίσης εὑρίσκομεν καὶ τὰ διαστήματα διὰ τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα λαμβάνει τιμὰς ἀρνητικάς.

**Ἐργασία ὀγδόη.** Καταστρώνομεν πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως διὰ συγκεντρώσεως εἰς αὐτὸν ὅλων τῶν προηγουμένων συμπερασμάτων μας.

**Ἐργασία ἐνάτη.** Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ καταστρωθέντος πίνακος χαράσσομεν εἰς σύστημα ἀξόνων ὀρθογωνίων τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως ἢ καὶ ὡς ἄλλως λέγομεν τὴν γραφικήν της παράστασιν.

**Ἐργασία δεκάτη, ἡ ὁποία συνήθως γίνεται ἐξ ἀρχῆς, εἶναι ἡ ἑξῆς.**

Εὑρίσκομεν ἂν ἡ συνάρτησις εἶναι **ἀρτία** ἢ **περιττὴ** ἢ καὶ **περιοδική.**

Τοῦτο διευκολύνει πολὺ τὴν ἐργασίαν μας, διότι ἂν εἶναι ἀρτία, ἡ μελέτη μας γίνεται εἰς τὸ διάστημα $[0, +\infty)$ καὶ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα τῶν y. Ἂν εἶναι περιττή, ἔχει κέντρον συρμετρίας τὴν ἀρχήν. Ἐὰν εἶναι περιοδική, ἡ μελέτη γίνεται εἰς τὸ διάστημα μιᾶς περιόδου. (Βλέπε σχετικῶς καὶ «Ἄλγεβρα $A_1$»).

## 12. 37 Παραδείγματα

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις f μὲ τύπον :**

$$f(x) = x^6 + 2x^4 - 7x^2 + 4.$$

**Ἀπάντησις. α)** Πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ $\mathfrak{D}(f) = R$.

**β)** Ἐπειδὴ ἡ f περιέχει μόνον ἀρτίας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς εἶναι ἀρτία, ἤτοι ἰσχύει $f(-x) = f(x)$. Ρίζαι αἱ : $\pm 1$ καὶ $f(x) \geqq 0$ $\forall x \in R$.

**γ)** Ἐπειδὴ εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$ δὲν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι.

Ἐπειδὴ τοῦ $x \to +\infty$ καὶ $f(x) \to +\infty$ δὲν ὑπάρχουν οὔτε ὁριζόντιοι ἀσύμπτωτοι οὔτε πλάγιαι.

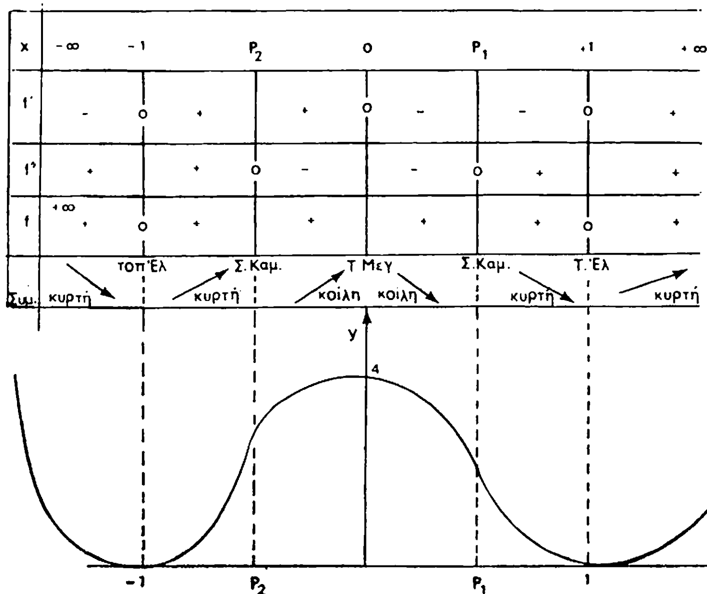
**δ)** Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι : $f'(x) = 6x^5 + 8x^3 - 14x$. Ἔχομεν $f'(x) = 0 \iff$ $\iff x(3x^4 + 4x^2 - 7) = 0$. Ἑπομένως κρίσιμα σημεῖα εἶναι τά :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι : $f''(x) = 30x^4 + 24x^2 - 14$ καὶ αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι :

$\pm\sqrt{\dfrac{-6+\sqrt{141}}{15}}$ τὰς καλοῦμεν $\rho_1$, $\rho_2$.

**ε)** Καταστρώνομεν σχετικὸν πίνακα ἐκ τοῦ ὁποίου καθορίζεται πλήρως ἡ μελέτη τῆς συναρτήσεως.



| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $\rho_2$ | | $0$ | | $\rho_1$ | | $+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′ | | − | 0 | + | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| f″ | | + | | + | 0 | − | | − | 0 | + | | + | |
| f | $+\infty$ | + | 0 | + | | + | | + | | + | 0 | + | |
| Συμ. | | κυρτή ↘ | τοπ. Έλ. | ↗ κυρτή | Σ. Καμ. | ↗ κοίλη | Τ. Μεγ. | κοίλη ↘ | Σ. Καμ. | κυρτή ↘ | Τ. Έλ. | ↗ κυρτή | |

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** **Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in R$ καὶ $\alpha \neq 0$.**

**Ἀπάντησις. α)** Ἔχομεν $\mathscr{D}(f) = R$. Ἐπίσης εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε $x \in R$.

**β)** Ἀφοῦ εἶναι συνεχὴς δὲν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι.

Διὰ $x \to +\infty$ καὶ $\alpha > 0$, $f(x) \to +\infty$ καὶ διὰ $\alpha < 0$, $f(x) \to -\infty$. Ὁμοίως ἂν $x \to -\infty$ καὶ $\alpha > 0$, $f(x) \to -\infty$, ἐνῶ ἂν $\alpha < 0$, $f(x) \to +\infty$.

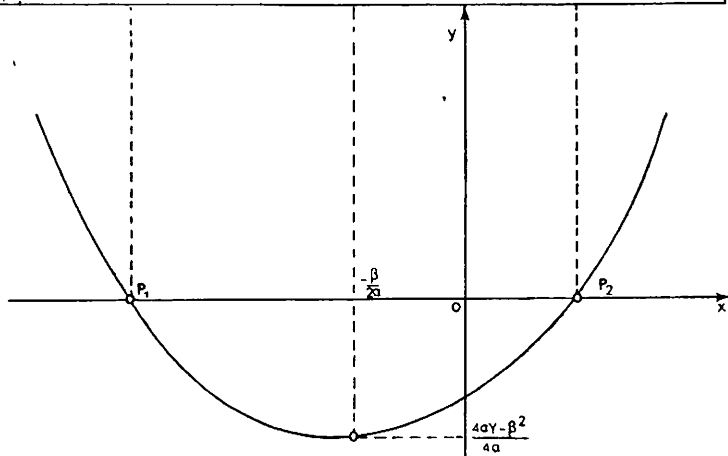
Ἐπίσης ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουν τὰ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ δὲν ὑπάρχουν οὔτε ὁριζόντιοι, οὔτε πλάγιαι ἀσύμπτωτοι. Ἁπλῶς παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχει κλάδους εἰς ἄπειρον.

γ) Ἡ παράγωγος εἶναι $f'(x) = 2\alpha x+\beta$.

Ρίζα τῆς παραγώγου εἶναι ἡ $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

1) Εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x > -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $f'(x) < 0$ διὰ $x < -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ἂν $\alpha > 0$ καὶ ἑπομένως τὸ $\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ εἶναι θέσις ἐλαχίστου, ἐνῶ ἂν $\alpha < 0$ εἶναι θέσις μεγίστου, διότι $f'(x) < 0$ διὰ $x < -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $f'(x) < 0$ διὰ $x > -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

| x | $-\infty$ | | $P_1$ | | $-\frac{\beta}{2\alpha}$ | | | | $P_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′ | | | − | | 0 | | | + | | | |
| f″ | | + | | + | | + | | | | + | |
| f | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↘ | $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ | | γ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |
| Σημ | | ∪ | | ∪ | Ἀπολ. ἐλαχ. | | ∪ | | | ∪ | |



2) Ἡ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ $f''(x) = 2\alpha$, ἂν $\alpha > 0$ θὰ εἶναι $f''\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = 2\alpha > 0$, ἄρα θέσις ἐλαχίστου καὶ ἂν $\alpha < 0$ θὰ εἶναι $f''\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = 2\alpha < 0$ εἶναι θέσις μεγίστου.

δ) Ἐπειδὴ διὰ $\alpha > 0$ εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $f'(x) < 0$ διὰ $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ θὰ εἶναι : f γνησίως αὔξουσα ἐν $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ καὶ f γνησίως φθίνουσα ἐν $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$.

Ἐνῶ ἂν $\alpha < 0$ θὰ εἶναι f γνησίως αὔξουσα ἐν $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ καὶ f γνησίως φθίνουσα ἐν $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

ε) Σημεῖα καμπῆς δὲν ὑπάρχουν ἀφοῦ $f''(x) = 2\alpha \neq 0$.

στ) Ἐπειδὴ ἂν $\alpha > 0$ εἶναι $f''(x) = 2\alpha > 0$ ἡ f εἶναι κυρτὴ ἐν $\mathcal{D}(f)$, ἤτοι στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, ἐνῶ ἂν $\alpha < 0$ εἶναι $f''(x) = 2\alpha < 0$ καὶ εἶναι κοίλη, ἤτοι στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω.

ζ) Αἱ ρίζαι τῆς $f(x) = 0$ εἶναι πραγματικαὶ ἂν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχουν δύο διακεκριμένα σημεῖα τομῆς τοῦ διαγράμματος αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τοῦ x. Ἂν $\Delta = 0$ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ἂν $\Delta < 0$ οὐδὲν σημεῖον κοινὸν τοῦ διαγράμματος αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x. Διὰ $x = 0$ ἔχομεν $y = f(x) = \gamma$ καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον $(0, \gamma)$.

η) Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως καὶ συμφυῶς αὐτοῦ καὶ τὴν ἀντίστοιχον γραφικὴν παράστασιν. Ὁ πίναξ ἀντιστοιχεῖ εἰς $\alpha > 0$ καὶ $\Delta > 0$ καὶ ρίζας $\rho_1, \rho_2$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x)=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ μὲ $\alpha, \beta, \gamma \in R$ καὶ $\alpha \neq 0$.**

**Ἡ μελέτη νὰ γίνῃ ἐπὶ τοῦ συγκεκριμένου παραδείγματος $f(x) = 3x^4 - 5x^2+2$.**

**Ἀπάντησις.** α) Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$.

Ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$. Ρίζαι τῆς $f(x) = 0$ εἶναι αἱ : $x = \pm 1$ καὶ $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ἤτοι τὸ διάγραμμα τῆς f τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα $-1$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1.

Διὰ $x = 0$ ἔχομεν $y = f(0) = 2$ καὶ τὸ διάγραμμα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον $(0, 2)$.

β) Λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς f δὲν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι.

Ἐπίσης ἐπειδὴ διὰ $x \to \pm\infty$ θὰ ἔχωμεν $f(x) \to +\infty$ ἔπεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι καὶ ἐπειδὴ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ δὲν ὑπάρχουν οὔτε πλάγιαι ἀσύμπτωτοι.

γ) Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι : $f'(x) = 12x^3 - 10x$ καὶ αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $0, -\sqrt{\frac{5}{6}}, +\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν παράγωγον ἡ ὁποία εἶναι : $f''(x) = 36x^2 - 10$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι: $f''(0) = -10 < 0$, $f''\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = f''\left(+\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = 20 > 0$.

Ἑπομένως εἰς τὸ σημεῖον 0 ἔχομεν τοπικὸν μέγιστον καὶ εἰς τὰ σημεῖα $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ καὶ $+\sqrt{\frac{5}{6}}$ ἔχομεν τοπικὰ ἐλάχιστα.

δ) Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν διαστημάτων μονοτονίας παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 12x^3 - 10x > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty\right)$, ἐνῶ $f'(x) < 0$ $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$.

Ἑπομένως ἡ f γνησίως αὔξουσα ἐν $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty\right)$ καὶ f γνησίως φθίνουσα ἐν $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$.

ε) Σημεῖα καμπῆς θὰ εὑρεθοῦν μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς δευτέρας παραγώγου, ποὺ εἶναι αἱ $\pm\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ἔχομεν: $f''(x) > 0$ διὰ $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{18}}\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{5}{18}}, +\infty\right)$ καὶ $f''(x) < 0$ διὰ $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{18}}, +\sqrt{\frac{5}{18}}\right)$ καὶ ἑπομένως διὰ $x = -\sqrt{\frac{5}{18}}$ καὶ $x = +\sqrt{\frac{5}{18}}$ ἔχομεν σημεῖα καμπῆς.

στ) Τὰ διαστήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ f εἶναι κυρτὴ ἢ κοίλη τὰ εὑρίσκομεν ἐπίσης ἀπὸ τὸ πρόσημον τῆς δευτέρας παραγώγου.

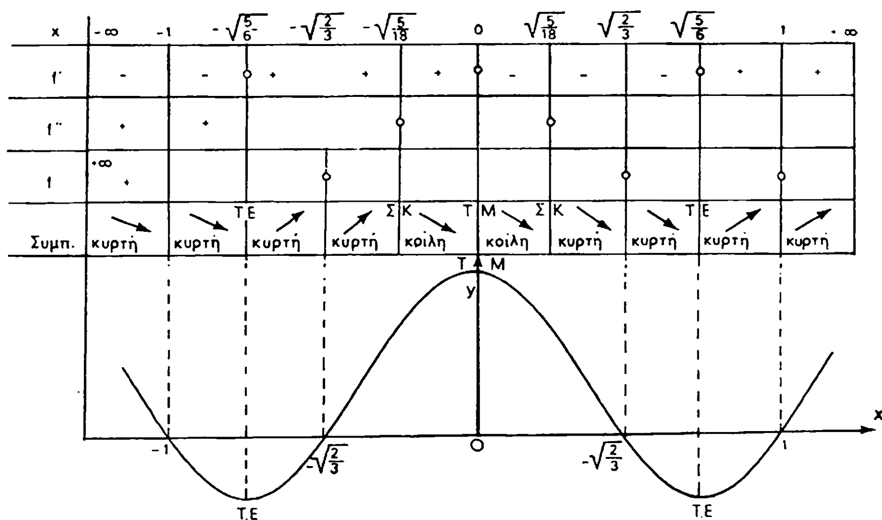
Προφανῶς, βάσει τοῦ προηγουμένου, εἰς τὰ διαστήματα $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{18}}\right)$ καὶ $\left(+\sqrt{\frac{5}{18}}, +\infty\right)$ ἡ f εἶναι κυρτὴ ἐνῶ εἰς τὸ διάστημα $\left(-\sqrt{\frac{5}{18}}, +\sqrt{\frac{5}{18}}\right)$ ἡ f εἶναι κοίλη.

ζ) Εὑρίσκομεν τώρα τὰ διαστήματα εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι $f(x) > 0$ καὶ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ $f(x) < 0$.

Εἶναι $f(x) > 0$ διὰ $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup (1, +\infty)$ καὶ $f(x) < 0$ διὰ $x \in \left(-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right)$.

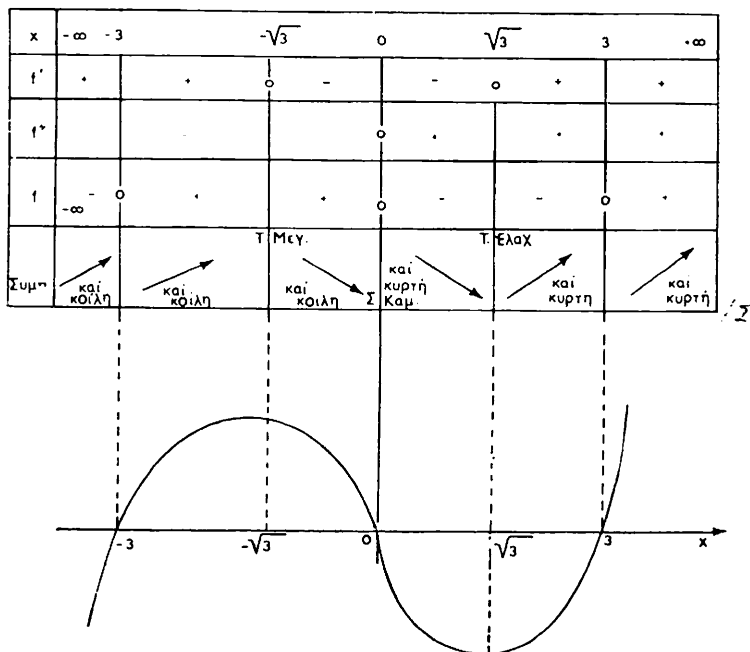
η) Καταστρώνομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως συμφυῶς καὶ τὸ διάγραμμα αὐτῆς.

*Σημείωσις*. Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι ἀρτία, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν αὐτὴν εἰς τὸ $[0, +\infty)$.




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x^3 - 9x$ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ ρίζαι τῆς $f(x) = 0$ αἱ $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Ἡ παράγωγος εἶναι $f'(x) = 3x^2 - 9$. Ρίζαι τῆς $f'(x) = 0$, αἱ $-\sqrt{3}$ καὶ $+\sqrt{3}$. Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = 6x$. Ρίζα ἡ 0. Ὁ πίναξ μεταβολῶν:



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \frac{1}{24} x(x-1)(x-2)(x-3)$ καὶ νὰ γίνῃ τὸ διάγραμμα αὐτῆς.**

**Ἀπάντησις.** 1) $\mathfrak{D}(f) = R$,

2) Δὲν εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ἢ τὴν ἀρχήν.

3) Τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα 0, 1, 2, 3.

4) Δὲν ἔχει ἀσυμπτώτους.

5) Εἶναι $f'(x) = \frac{1}{12}(2x^3 - 9x^2 + 11x - 3)$.

Ρίζαι αὐτῆς : $\frac{3}{2}$, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6) Εἶναι $f''(x) = \frac{1}{12}(6x^2 - 18x + 11)$.

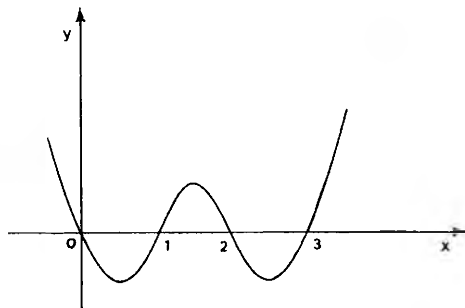
Ρίζαι αὐτῆς : $\frac{9 \pm \sqrt{15}}{6}$.

7) Ἐπειδὴ $f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ εἰς τὸ σημεῖον $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{128}\right)$ παρουσιάζει μέγιστον ἐνῷ εἰς τὰ σημεῖα $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ παρουσιάζει ἐλάχιστα.

8) Σημεῖα καμπῆς εἰς τὰς θέσεις $x_1 = \frac{9 - \sqrt{15}}{6}$ καὶ $x_2 = \frac{9 + \sqrt{15}}{6}$.

9) Διὰ $x \to \pm\infty$ $f(x) \to -\infty$.

10) Γραφικὴ παράστασις (πρόχειρος).




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ καὶ νὰ γίνῃ τὸ διάγραμμα αὐτῆς.**

**Ἀπάντησις.** 1) Ἔχομεν $\mathfrak{D}(f) = R - \{0, 1, 2\}$.

2) Αἱ εὐθεῖαι $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ εἶναι κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι.

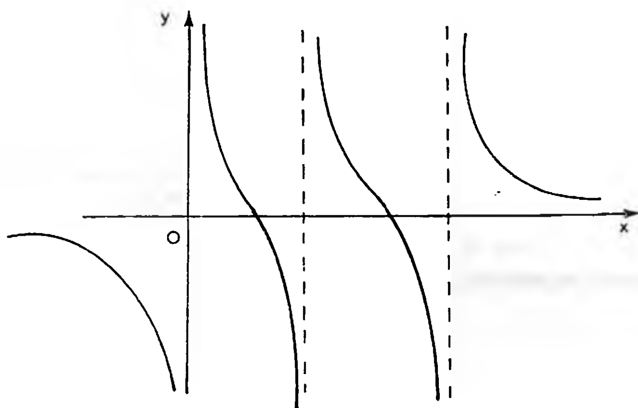
Καὶ ἐπειδὴ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ἡ εὐθεῖα $y = 0$ εἶναι ὁριζοντία ἀσύμπτωτος (ἤτοι ὁ ἄξων τῶν x).

3) Τομαὶ τοῦ διαγράμματος τῆς f μὲ τὸν ἄξονα τῶν x αἱ ρίζαι τῆς $f(x)=0 \iff$ $\iff 3x^2-6x+2=0$.

4) Εἶναι $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}$ καὶ ἐπειδὴ $f'(x)<0\ \forall x\in\mathcal{D}(f)$ εἶναι ἡ f γνησίως φθίνουσα ἐν $\mathcal{D}(f)$.

5) Εἶναι $f''(x)=2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-2)^3}\right)$ καὶ ἡ $f''(x)=0$ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ. Ἐπειδὴ διὰ $x>2$ εἶναι $f''(x)>0$ καὶ διὰ $x<0$ εἶναι $f''(x)<0$ ἕπεται ὅτι μεταξὺ 0 καὶ 2 εὑρίσκονται ὅλαι αἱ ὑπάρχουσαι πραγματικαὶ ρίζαι τῆς $f''(x)=0$. Ἐπειδὴ διὰ $x\to 0+0 \Rightarrow \frac{1}{x^3}\to+\infty$ εἶναι $f''(x)>0$ καὶ διὰ $x\to 1-0 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^3}\to-\infty$ εἶναι $f''(x)<0$. Ἕπεται ὅτι μεταξὺ 0 καὶ 1 ὑπάρχει σημεῖον καμπῆς. Ἐπίσης καὶ μεταξὺ 1 καὶ 2 ὑπάρχει σημεῖον καμπῆς.

Γραφικὴ παράστασις :




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x)=\frac{x|x|}{|x+1|}$ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς.**

**Ἀπάντησις. α)** Ἔχομεν προφανῶς $\mathcal{D}(f)=R-\{-1\}$.

**β)** Σημεῖα τομῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, αἱ ρίζαι τῆς $f(x)=0$, ἤτοι μόνον τὸ σημεῖον 0.

γ) Ἀσύμπτωτοι. Ἐπειδὴ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ δὲν ὑπάρχουν ὁριζόντιοι ἀσύμπτωτοι.

Ἐπειδὴ $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=-\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=-\infty$ ἡ εὐθεία $x=-1$ εἶναι κατακόρυφος ἀσύμπτωτος.

Ἐπειδὴ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|}{|x+1|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1=\alpha$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$ καὶ ὁμοίως διὰ $x\to-\infty$ ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεία $y=x-1$ εἶναι πλαγία ἀσύμπτωτος.

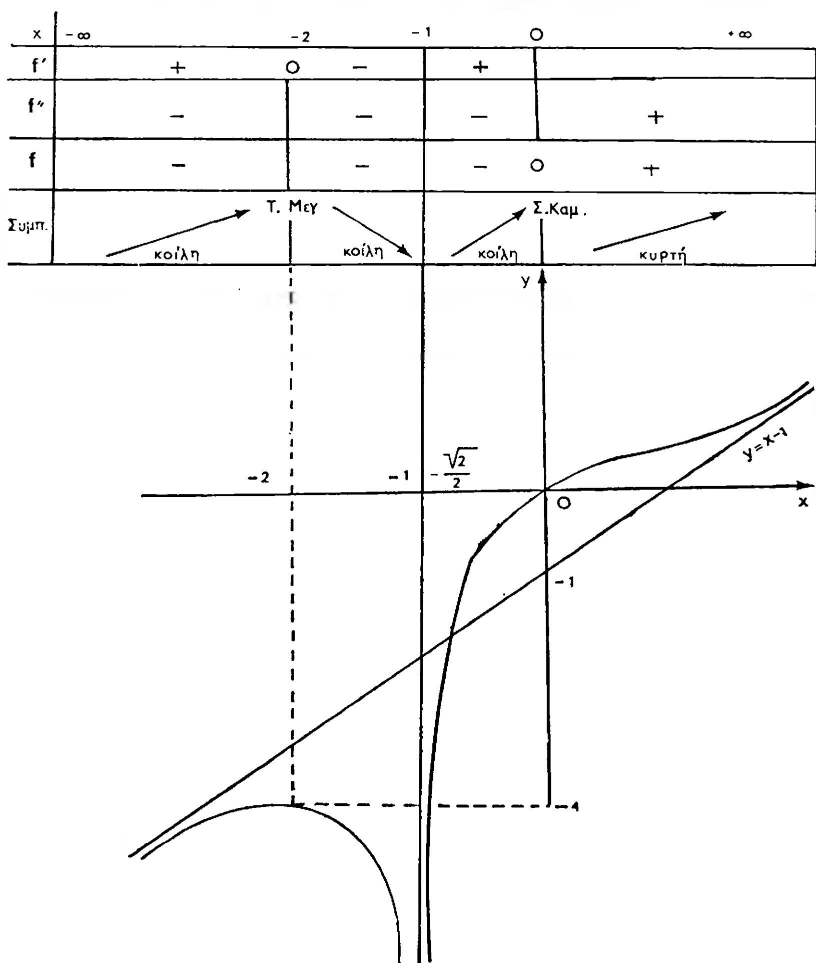
᾿Ακόμη ἐπειδὴ $f(x) > 0$ διὰ $x > 0$ καὶ $f(x) < 0$ διὰ $x < 0$ $(x \neq 1)$, τὸ διάγραμμα τῆς f διὰ $x > 0$ εἶναι ἄνω τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ διὰ $x < 0$ $(x \neq -1)$ εἶναι κάτω τοῦ ἄξονος.

δ) ᾿Ακρότατα. Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $x > 0$ εἶναι $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ καὶ διὰ $x < -1$ εἶναι ἐπίσης $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

῾Επομένως $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ διὰ $x \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$. ᾿Ενῶ εἶναι $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$ διὰ $x \in (-1, 0]$.

῾Η παράγωγος εἶναι $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ διὰ $x \in (-2, -1)$ καὶ ἡ ἐκ δεξιῶν παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι $f'(0) = 0$.



Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ παράγωγος εἶναι:

$$f'(x) = -\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \forall x \in (-1, 0).$$

Εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x \in (-1, 0)$ καὶ $f'(x) < 0$ δι' οὐδὲν x. Ἡ ἀριστερὰ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι $f'(0) = 0$.

Κατόπιν τούτου ἔχομεν ὅτι:

Ἡ συνάρτησις f γνησίως αὔξουσα ἐν $(-\infty, -2)$, f γνησίως φθίνουσα ἐν $(-2, -1)$ καὶ f γνησίως αὔξουσα ἐν $(-1, +\infty)$.

Ἑπομένως παρουσιάζει μόνον τοπικὸν μέγιστον εἰς τὴν θέσιν $x = -2$ καὶ εἶναι τοῦτο τὸ $f(-2) = -4$.

ε) Κυρτὰ — κοῖλα — σημεῖα καμπῆς.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty) \text{ καὶ } f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3} \quad \forall x \in (-1, 0]$$

Εἶναι $f''(x) > 0 \ \forall x \geqq 0$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ $f''(x) < 0 \ \forall x < -1$ καὶ ἡ δεξιὰ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι $f''(0) = 2$.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι $f''(x) < 0 \ \forall x \in (-1, 0]$ καὶ ἀριστερὰ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι $f''(0) = -2$.

Κατόπιν τούτου ἡ f κυρτὴ διὰ $x > 0$ καὶ ἡ f κοίλη διὰ $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν μίαν περιοχὴν τοῦ μηδενὸς ἀλλάσσει πρόσημον ἔχομεν ἐκεῖ σημεῖον καμπῆς.

στ) Καταστρώνομεν τώρα τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ συμφυῶς καὶ τὸ διάγραμμα. (Ἡ ἀσύμπτωτος $y = x - 1$ τέμνει τὸ διάγραμμα εἰς τὸ σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον $\frac{x|x|}{|x+1|} =$ $= x - 1$, ἡ ὁποία ἔχει λύσιν διὰ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$).

**B**

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
## ΜΕΘΟΔΟΙ
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ

**12. 38** Κατωτέρω παραθέτομεν μίαν σειρὰν ἀσκήσεων ὑποδειγματικῶς λελυμένων, ὥστε ὁ ἀναγνώστης νὰ δύναται νὰ παρακολουθήσῃ τὴν μεθοδολογίαν διὰ τὴν ἐπίλυσιν σχετικῶν θεμάτων.

Τονίζομεν ἰδιαιτέρως, ὅτι μετὰ μεγάλης προσοχῆς θὰ πρέπει νὰ γίνῃ ἡ μελέτη αὐτῶν τῶν ἀσκήσεων, διότι ἡ δυσκολία ἔγκειται κυρίως εἰς τὴν προσοχὴν μὲ τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν τὰς σχετικὰς προτάσεις.

Ἡ μεθοδολογία διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀσκήσεων ἐπὶ τῶν παραγώγων ἀνεπτύχθη ἐπαρκῶς εἰς τὴν θεωρίαν, ὅπου διὰ τῶν παρατηρήσεων ἐπισημαίνομεν τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα θὰ πρέπει νὰ καταβάλλεται ἰδιαιτέρα προσοχή. Δὲν νομίζομεν, ὅτι ὑπάρχει ἄλλη δυσκολία, ἐννοεῖται δι' ἀσκήσεις ἁπλᾶς καὶ ὄχι δι' ἄλλας αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦν ἰδιαιτέραν θεωρίαν ἢ καὶ θεμάτων τὰ ὁποῖα εἶναι καθαρῶς θεωρητικά. Ἐπομένως θὰ πρέπει νὰ προσεχθῇ μᾶλλον τὸ θεωρητικὸν μέρος περισσότερον καὶ νὰ καταβληθῇ προσπάθεια κατανοήσεως τῶν ἐννοιῶν.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων μὲ τύπους :**

1) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 2) $f(x)=\sqrt[3]{2e^x+2^x+1}+\log^2 x$

3) $f(x)=\text{τοξ}_1\text{συν}\sqrt{x}$ 4) $f(x)=\log^2\left(\text{τοξ}_1\text{εφ}\,\frac{x}{3}\right)$.

**Ἀπάντησις.** 1) Προφανῶς $\mathcal{D}(f)=R^+$. Θέτομεν $x+\sqrt{x+\sqrt{x}}=\omega$ καὶ ἔχομεν: $f'(x)=\frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}$. Ἀλλὰ ἂν $x+\sqrt{x}=\varphi$, θὰ ἔχωμεν: $\omega'=(x)'+(\sqrt{\varphi})'=1+\frac{\varphi'}{2\sqrt{\varphi}}$. Ἐπειδὴ $\varphi'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ λαμβάνομεν: $\omega'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ καὶ τελικῶς: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$ $\forall x\in\mathcal{D}(f)$.

2) Προφανῶς $\mathcal{D}(f)=R^+$. Θέτομεν: $2e^x+2^x+1=\omega$ καὶ λαμβάνομεν: $f(x)=$

$= \omega^{\frac{1}{3}} + \log^4 x$, ὁπότε : $f'(x) = \frac{1}{3}\omega^{-\frac{2}{3}}.\omega' + 5(\log x)^4.\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(2e^x+2^x+1)^2}}.$

$.(2e^x+2^x\log 2) + \frac{5}{x}\log^4 x \ \forall x \in \mathscr{D}(f)$ (διότι $(2^x)' = 2^x\log 2$).

3) Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = [0, 1]$. Θὰ ἔχωμεν :

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{-1(\sqrt{x})^2}}.(\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in (0, 1).$$

4) Προφανῶς $\mathscr{D}(f) = R^+$, ὁπότε ἂν τεθῇ $\text{τοξ}_0\text{εφ}\frac{x}{3} = \omega$, θὰ ἔχωμεν : $f(x) = \log_2\omega$ καὶ ἑπομένως :

$$f'(x) = 2\log\omega(\log\omega)' = 2\log\omega.\frac{1}{\omega}.\omega' = 2\log\left(\text{τοξ}_0\text{εφ}\frac{x}{3}\right).\frac{1}{\text{τοξ}_0\text{εφ}\frac{\chi}{3}}.\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}.\frac{1}{3}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων μὲ τύπους :***

**1)** $f(x) = \text{τοξ ημ}\frac{2x}{1+x^2}$ **2)** $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

**3)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\,\text{ημ}^3 x\text{συν}^2 \alpha x$

***καὶ εἰς τὰ πεδία ὁρισμοῦ των.***

**Ἀπάντησις. 1)** Θέτομεν $\frac{2x}{1+x^2} = \varphi$ καὶ λαμβάνομεν $f(x) = \text{τοξημ}\varphi$, ὁπότε $f'(x) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}.\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2x)^2}{(1+x^2)^2}}}.\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}.\frac{2(1+x^2)-2x.2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}.$$

Καὶ τελικῶς : $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{ἂν } |x| < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{ἂν } |x| > 1 \end{cases}$

Διὰ $|x| = 1$ δὲν ὑπάρχει παράγωγος.

2) Ἐπειδὴ ἂν $f(x) = \log|x|$ θὰ εἶναι : $f'(x) = (\log|x|)' = \frac{(x|)^1}{|x|} = \frac{1}{x}$ καὶ γενικώτερον ἂν $y = \log|\varphi(x)|$, θὰ εἶναι : $y' = (\log|\varphi(x)|)' = \frac{1}{|\varphi(x)|}.|\varphi(x)|' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς λογαριθμικῆς παραγώγου :

Πρὸς τοῦτο θέτομεν : $y = |f(x)| = \left|\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\right| = \sqrt[3]{\frac{|x^3|(x^2+1)}{\sqrt[5]{|5-x|}}}$ καὶ λαμβά-

νομεν: $\log y = \log|x| + \frac{1}{3}\log(x^2+1) - \frac{1}{15}\log|5-x| \Rightarrow (\log y)' = (\log|f(x)|)' =$

$$= (\log|x|)' + \left(\frac{1}{3}\log(x^2+1)\right)' - \left(\frac{1}{15}\log|5-x|\right)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x'}{x} + \frac{1}{3}\,\frac{2x}{1+x^2} -$$

$$-\left(\frac{1}{15}\cdot\frac{(5-x)'}{5-x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(1+x^2)} + \frac{1}{15(5-x)}, \text{ ὁπότε:}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{3(1+x^2)} + \frac{1}{15(5-x)}\right).$$

3) Ἔχομεν: $|f(x)| = \sqrt[3]{|x|^2}\,\frac{|1-x|}{1+x^2}\,|\eta\mu x|^3\,|\sigma\upsilon\nu^2 x|$ καὶ $\log|f(x)| =$

$= \frac{2}{3}\log|x| + \log|1-x| - \log(1+x^2) + 3\log|\eta\mu x| + 2\log|\sigma\upsilon\nu x|$, ὁπότε: $(\log|f(x)|)' =$

$$= \frac{2}{3}(\log|x|)' + (\log|1-x|)' - (\log(1+x^2))' + 3(\log|\eta\mu x|)' + 2(\log|\sigma\upsilon\nu x|)' \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{x} + \frac{(1-x)'}{(1-x)} - \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} + 3\,\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} + 2\,\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} +$$

$$+3\sigma\varphi x - 2\varepsilon\varphi x = \sigma(x) \text{ καὶ τέλος: } f'(x) = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\,\eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x.\sigma(x).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $f_1$ μὲ $f_1(x) = |\eta\mu x|$ καθὼς καὶ τῆς $f_2$ μὲ $f_2(x) = \eta\mu|x|$.**

**Ἀπάντησις.** *α)* Παράγωγος τῆς $f_1(x) = |\eta\mu x|$. Ἐπειδὴ $\forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ μὲ $k \in Z$ εἶναι $\eta\mu x > 0$ θὰ ἔχωμεν: $f_1(x) = \eta\mu x$ καὶ ἑπομένως $f'_1(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ $\forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$. Ἐπίσης ἐπειδὴ $\forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in Z$ εἶναι $\eta\mu x < 0$ θὰ ἔχωμεν:

$$f'_1(x) = (-\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$$

Ἐξετάζομεν ἐὰν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι εἰς ἕκαστον τῶν ἄκρων τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων.

α) Ἐὰν $x \to 2k\pi + 0$ θὰ ἔχωμεν:

$$f'(2k\pi+0) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{f(2k\pi+\varepsilon) - f(2k\pi)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{\eta\mu\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Ἐὰν $x \to 2k\pi - 0$ θὰ ἔχωμεν:

$$f'(2k\pi-0) = \lim_{\varepsilon\to 0-0}\frac{f(2k\pi+\varepsilon) - f(2k\pi)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0-0}\frac{-\eta\mu\varepsilon}{\varepsilon} = -1$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι εἶναι διάφοροι δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 2k\pi$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι εἰς ἕκαστον τῶν ἄλλων ἄκρων.

**β)** Ἐπειδὴ διὰ $x>0$ εἶναι $f(x) = \eta\mu x$ ἕπεται ὅτι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

Ἐπειδὴ διὰ $x<0$ εἶναι $f(x) = -\eta\mu x$ ἕπεται ὅτι $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ $\forall x \in (-\infty, 0)$.

Εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f καθ' ὅσον αἱ πλευρικαὶ παράγωγοι εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν εἶναι διαφορετικαί.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων μὲ τύπους:**

α) $f(x) = \sqrt{x}$ β) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

γ) $f(x) = (\text{ημ}x)\sqrt[3]{|x|}$ δ) $f(x) = x + |x|$
εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

**Ἀπάντησις.** α) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R^+ \cup \{0\}$ καὶ ἑπομένως αὐτὴ δὲν ἔχει παράγωγον, ὡς γνωρίζομεν: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in R^+$.

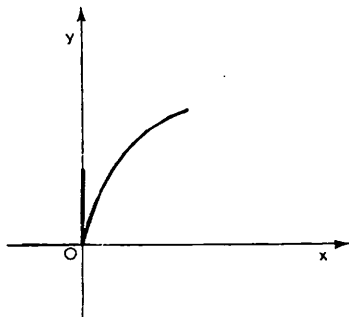
Ἐὰν τώρα $x \to 0+0$, τότε $f'(x) \to +\infty$ καὶ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως εἶναι $+\infty$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ εἶναι ὁ ἄξων Oy. Τὸ σημεῖον O καλεῖται σημεῖον στασιμότητος (Σχ. α).

β) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Ἡ παράγωγος εἶναι: $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $\forall x \in R - \{0\}$.

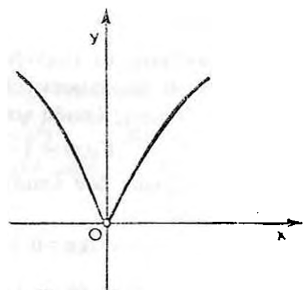
Ἄρα δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

Ἂν $x \to 0+0$, τότε $f'(x) \to +\infty$ καὶ $x \to 0-0$, τότε $f'(x) \to -\infty$.

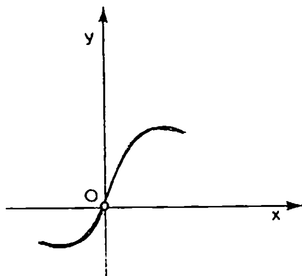
Ἀλλὰ ἐπειδὴ $f(x) \geqq 0$ $\forall x \in R$, θὰ ἔχωμεν εἰς τὸ O ὡς ἐφαπτομένην τὸν ἄξονα τῶν y κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν δύο τόξων τοῦ διαγράμματος ὡς τὸ (Σχ. β). Τὸ σημεῖον O καλεῖται τότε σημεῖον ἀνακάμψεως.



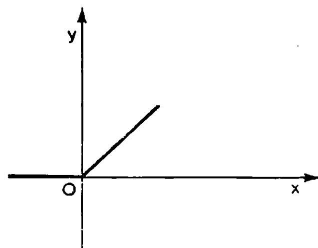
(α)



(β)



(γ)



(δ)

γ) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Καὶ ἔχομεν:

$$f(x) = \begin{cases} +\sqrt[3]{x} & \text{ἂν } x \geqq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{ἂν } x \leqq 0 \end{cases}$$

Ἡ παράγωγος εἶναι: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x^2}}$ $\forall x \in R - \{0\}$.

Ἄρα δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$. Ἀλλὰ ἂν $x \to 0+0$ ἢ $x \to 0-0$ θὰ ἔχωμεν: $f'(x) \to +\infty$. Ἐπειδὴ δὲ $f(x)$ καὶ $x$ ὁμόσημα εἰς τὸ O ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ὁ ἄξων τῶν y ὁ ὁποῖος διαπερᾷ τὸ διάγραμμα τῆς f. Τὸ σημεῖον O καλεῖται σημεῖον καμπῆς (Σχ. (γ)).

δ) Προφανῶς $\mathcal{D}(f) = R$. Καὶ ἔχομεν:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{ἂν } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ἂν } x \leqq 0 \end{cases}$$

Ἡ παράγωγος εἶναι $f'(x) = 2$ διὰ $x>0$ καὶ 0 διὰ $x<0$. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν ἡ παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $x = 0$, διότι οἱ παράγωγοι δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ εἶναι διάφοροι. Τὸ διάγραμμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο ἡμιευθείας ὡς εἰς τὸ (Σχ. δ) καὶ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ O τῶν γραμμῶν σχηματίζουν μίαν γωνίαν, τὴν γωνίαν τῶν δύο γραμμῶν τοῦ διαγράμματος. Τὸ σημεῖον O καλεῖται γωνιακὸν σημεῖον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν F μὲ τύπον:**

$$F(x) = f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x)$$

**Νὰ εὑρεθῇ ἡ $F'(x)$.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν ἄθροισμα δύο συνθέτων συναρτήσεων καὶ ἑπομένως:

$$F'(x) = f'(\eta\mu^2 x)(\eta\mu^2 x)' + f'(\sigma\upsilon\nu^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x)' = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x f'(\eta\mu^2 x) - 2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x f'(\sigma\upsilon\nu^2 x) =$$
$$= \eta\mu 2x[f'(\eta\mu^2 x) - f'(\sigma\upsilon\nu^2 x)].$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ἀποδείξατε, ὅτι ἡ παράγωγος μιᾶς ἀρτίας καὶ παραγωγισίμου συναρτήσεως εἶναι μία συνάρτησις περιττὴ καὶ ἡ παράγωγος μιᾶς περιττῆς καὶ παραγωγισίμου συναρτήσεως εἶναι μία συνάρτησις ἀρτία.**

**Ἀπάντησις.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f παραγωγίσιμος εἰς ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[-\alpha, \alpha]$ καὶ ἀρτία ἐπ' αὐτοῦ. Προφανῶς θὰ ἰσχύῃ $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$. Παραγωγίζομεν τὰ μέλη τῆς ταυτότητος καὶ λαμβάνομεν: $f'(-x).(-x)' = f'(x)(x)' \iff f'(x).1 = -1.f'(-x) \iff -f'(x) = f'(-x)$, ἤτοι συνάρτησις περιττή. Ὁμοίως καὶ διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ παράγωγος μιᾶς παραγωγισίμου περιοδικῆς συναρτήσεως περιόδου θ εἶναι ἐπίσης συνάρτησις περιοδικὴ τῆς αὐτῆς περιόδου.**

**Ἀπάντησις.** Διότι, ἀφοῦ ἡ f εἶναι παραγωγίσιμος εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της καὶ ἀφοῦ $f(x+\theta) = f(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ $(x+\theta \in \mathcal{D}(f))$ θὰ ἔχωμεν, παραγωγίζοντες τὰ μέλη τῆς ὡς ἄνω ταυτότητος, $f'(x+\theta)(x+\theta)' = f'(x) \iff f'(x+\theta) = f'(x)$, καὶ ἑπομένως ἡ f′ εἶναι ἐπίσης περιοδικὴ τῆς αὐτῆς περιόδου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x^\nu / \nu \in N$. Ἀποδείξατε ὅτι:**

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} = 2^\nu.$$

**Ἀπάντησις.** Ἡ $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, ἡ $f''(x) = \nu(\nu-1)x^{\nu-2}$, $f'''(x) = \nu(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3}, \ldots$, $f^{(k)}(x) = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-k+1)x^{\nu-k}$ μὲ $k \in N$ καὶ $k \leq \nu$. Κατόπιν τούτου εἶναι:

$$\frac{f'(x)}{1!} = \frac{\nu}{1!}x^{\nu-1}, \ \frac{f''(x)}{2!} = \frac{\nu(\nu-1)}{2!}x^{\nu-2}, \ldots, \frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu-k+1)}{k!}x^{\nu-k}.$$

Ἄρα $f(x) + \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} = x^\nu + \frac{\nu}{1!}x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}x^{\nu-2} + \ldots + 1 = (x+1)^\nu$.

Ἐκ ταύτης διὰ $x = 1$, εὐκόλως λαμβάνομεν τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \log ημx$ καὶ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Νὰ εὑρεθῇ ἂν ὑπάρχῃ $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ οὕτως ὥστε $f'(\xi) = 0$.**

**Ἀπάντησις.** Ἐξετάζομεν ἂν ἡ f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις ἡμίτονον εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$ θὰ εἶναι συνεχὴς καὶ ἐπὶ τοῦ $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ καὶ ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις log εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R^+$, εἶναι δὲ $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ τὸ $ημx > 0$, καὶ ἡ σύνθετος συνάρτησις $f(x) = \log ημx$ εἶναι συνεχὴς $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Ἐπίσης ὑπάρχει καὶ ἡ παράγωγος τῆς f $\forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. Ἔχομεν δὲ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \log ημ\frac{\pi}{6} = \log\frac{1}{2}$ καὶ $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \log ημ\frac{5\pi}{6} = \log\frac{1}{2}$, ἄρα $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Πληροῦνται συνεπῶς πᾶσαι αἱ συνθῆκαι τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle, ὁπότε ὑπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ οὕτως ὥστε $f'(\xi) = 0$.

Ἡ παράγωγος εἶναι: $f'(x) = σφx$.

Ἐπειδὴ ἡ $σφx = 0$ μὲ $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ἔχει τὴν λύσιν $x = \xi = \frac{\pi}{2}$, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $\frac{\pi}{2}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ μὲ τύπους ἀντιστοίχως $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ καὶ $f_2(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ καὶ διὰ τὰς ὁποίας ὁρίζομεν $\mathcal{D}(f_1, f_2) = [1, 4]$. Ἐξετάσατε ἂν πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τοῦ θεωρήματος Cauchy. Νὰ ἐξετασθῇ ἀκολούθως ποῖον τὸ $\xi \in (1, 4)$ οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος Cauchy.**

**Ἀπάντησις.** Αἱ συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ εἶναι συνεχεῖς $\forall x \in R$ ἄρα καὶ $\forall x \in \mathcal{D}(f_1, f_2) = [1, 4]$. Αἱ παράγωγοι εἶναι ἀντιστοίχως: $f'_1(x) = 2x - 2$ καὶ $f'_2(x) = 3x^2 - 14x + 20$ καὶ ὑπάρχουν $\forall x \in R$ ἄρα καὶ $\forall x \in (1, 4)$.

Ἐπὶ πλέον ἡ $f'_2(x)$ εἶναι $\neq 0$ $\forall x \in (1, 4)$, ἀφοῦ ἔχει ρίζας μιγαδικάς.

Κατόπιν τούτου ἔχει ἐφαρμογὴν ὁ τύπος Cauchy. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{f_1(4) - f_1(1)}{f_2(4) - f_2(1)} = \frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)} \text{ μὲ } \xi \in (1, 4) \iff \frac{11-2}{27-9} = \frac{2\xi - 2}{3\xi^2 - 14\xi + 20}.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν:

$$\xi_1 = 2 \quad \text{καὶ} \quad \xi_2 = 4.$$

Ἐκ τούτων ἁρμόζει μόνον ἡ $\xi_1 = 2$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Ἐὰν $\nu \in N: \nu > \theta^2/\theta \in N$ δείξατε, ὅτι:**

$$\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu} < \frac{1}{2\theta}.$$

**Ἀπάντησις.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \sqrt{x}$ μὲ $\mathcal{D}(f) = [\nu, \nu+1]$. Εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα μέσης τιμῆς καὶ ἔχομεν:

$$f(\nu+1) - f(\nu) = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu} = [(\nu+1) - (\nu)]f'(\xi)$$

ὅπου $\xi \in (\nu, \nu+1)$.

Εἶναι ὅμως $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ καὶ ἄρα: $\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu} = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$ μὲ $\xi \in (\nu, \nu+1)$.

Ἐπειδὴ $\nu > \theta^2 \Rightarrow \xi > \theta^2$ καὶ ἄρα $\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}} < \dfrac{1}{2\theta}$. Ὥστε καί: $\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu} < \dfrac{1}{2\theta}$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Ἀπὸ τὸ γνωστὸν ἄθροισμα τῆς γεωμετρικῆς προόδου:**

$$1+x+x^2+\ldots+x^\nu = \frac{x^{\nu+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1), \quad (A).$$

**Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα:**

$$\Sigma_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1}$$

$$\Sigma_2 = 1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1}$$

**Ἀπάντησις.** Ἐπειδὴ ἡ (A) ἀληθεύει $\forall x \in R - \{1\}$ καὶ ἂν ἐξισώσωμεν τὰς παραγώγους αὐτῶν τῶν μελῶν τῆς ταυτότητος, θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1} = \frac{\nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^\nu + 1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

Πολλαπλασιάζοντες τώρα ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ x λαμβάνομεν:

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+\nu x^\nu = \frac{\nu x^{\nu+2} - (\nu+1)x^{\nu+1} + x}{(x-1)^2}$$

Καὶ παραγωγίζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1} = \frac{1+x-(\nu+1)^2x^\nu + (2\nu^2+2\nu-1)x^{\nu+1} - \nu x^{\nu+2}}{(1-x)^3}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Δείξατε ὅτι θὰ πληρῇ τὴν ἐξίσωσιν:**

$$xf'(x) = (1-x^2)f(x)$$

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν: $f'(x) = x'e^{-\frac{x^2}{2}} + x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)' =$

$= e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$ καὶ συνεπῶς: $xf'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) = (1-x^2)f(x)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14. Ἐὰν $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\eta\mu^2 x}$, δείξατε ὅτι:**

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ καὶ

$$f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu^2x)'(1+\eta\mu^2x) - (1+\eta\mu^2x)'\sigma\upsilon\nu^2x}{(1+\eta\mu^2x)^2} =$$

$$= \frac{-2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x(1+\eta\mu^2x) - \sigma\upsilon\nu^2x(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\eta\mu^2x)^2} = \frac{-2\eta\mu 2\chi}{(1+\eta\mu^2x)^2}, \text{ ὁπότε } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{9}.$$

$$\text{Ἄρα}: f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 3\left(\frac{-8}{9}\right) = 3.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15. Εὕρετε τὴν ν-τάξεως παράγωγον διὰ τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \eta\mu 5x\sigma\upsilon\nu 2x$.**

**Ἀπάντησις.** Γνωρίζομεν ὅτι : $(\eta\mu x)^{(\nu)} = \eta\mu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)$ καὶ $(\sigma\upsilon\nu x)^{(\nu)} = \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)$

καὶ κατόπιν τούτων ἐπειδὴ $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu(5x+2x) + \frac{1}{2}\eta\mu(5x-2x) = \frac{1}{2}\eta\mu 7x + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 3x$ θὰ ἔχωμεν :

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2}(\eta\mu 7x)^{(\nu)} + \frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 3x)^{\nu} = \frac{1}{2}\cdot 7^{\nu}\eta\mu\left(7x+\frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot 3^{\nu}\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{\nu\pi}{2}\right).$$

Πράγματι ἂν $f_1(x) = \eta\mu 7x$ καὶ τεθῇ $7x = \omega$ θὰ ἔχωμεν : $f_1(x) = \eta\mu\omega$, ὅτε $f'_1(x) = (\eta\mu\omega)' = \sigma\upsilon\nu\omega\cdot\omega' = (\sigma\upsilon\nu 7x)\cdot 7 = 7\eta\mu\left(7x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Καὶ ἂν $f_1^{(k)}(x) = 7^k\eta\mu\left(7x+\frac{k\pi}{2}\right)$, θὰ ἔχωμεν :

$$f_1^{k+1}(x) = \left[7^k\eta\mu\left(7x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]' = 7^k\left[\eta\mu\left(7x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]' =$$

$$= 7^k\,\sigma\upsilon\nu\left(7x+\frac{k\pi}{2}\right)\cdot\left(7x+\frac{k\pi}{2}\right)' = 7^{k+1}\sigma\upsilon\nu\left(7x+\frac{k\pi}{2}\right) =$$

$$= 7^{k+1}\,\eta\mu\left(7x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 7^{k+1}\eta\mu\left(7x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

$$\text{Ὥστε}: \ (\eta\mu 7x)^{\nu} = 7^{\nu}\eta\mu\left(7x+\frac{\nu\pi}{2}\right)\forall\nu\in N.$$

Ὁμοίως καὶ διὰ τὸ συνημίτονον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μέ : $f(x) = \log(x^2+x-2)$. Ὑποτιθεμένου, ὅτι ἔχει παραγώγους πάσης τάξεως εὕρετε τὴν παράγωγον τάξεως ν.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν : $f'(x) = \frac{(x^2+x-2)'}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$. Μετασχηματίζομεν τὸ κλάσμα εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων καὶ ἔχομεν : $f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$, ὁπότε ἀγόμεθα εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τάξεως $\nu-1$ παραγώγων τῶν συναρτήσεων $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ καὶ $f_2(x) = \frac{1}{x+2}$, διότι $f^{(\nu)}(x) = f_1^{(\nu-1)}(x) + f_2^{(\nu-1)}(x)$.

Ἔχομεν: $f_1'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = [(x-1)^{-1}]' = -1(x-1)^{-2}(x-1)' = -1\cdot(x-1)^{-2}$.

Ἐπίσης $f''_1(x)=(-1)(-2)(x-1)^{-3}$ καὶ $f_1^{(\nu-1)}(x)=(-1)(-2)\ldots[-(\nu-1)](x-1)^{-(\nu-1)-1} = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!(x-1)^{-\nu}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $f_2^{(\nu-1)}(x) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!(x+2)^{-\nu}$.

Ἐπομένως: $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^{\nu}} + \frac{1}{(x+2)^{\nu}}\right]$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17. Ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ $(\alpha, \beta)$ καὶ εἶναι $f'(x) = 0$ $\forall x\in(\alpha, \beta)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $f(x) = f(\alpha)$ $\forall x\in[\alpha, \beta]$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἀφοῦ ἡ f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ $(\alpha, \beta)$, τότε κατὰ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς ὑπάρχει $\xi$ μὲ $\alpha<\xi<\beta$ οὕτως ὥστε $f'(\xi)\cdot(\beta-\alpha) = f(\beta) - f(\alpha)$.

Ἐὰν τεθῇ ἀντὶ $\beta$ τὸ x, τότε θὰ ἔχωμεν:

$f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)f'(\xi)$ μὲ $\alpha<\xi<x$. Ἀλλὰ $f'(\xi) = 0$, ἀφοῦ $f'(x) = 0$ $\forall x\in(\alpha, x)$.

Ὥστε $f(x) = f(\alpha)$ $\forall x\in[\alpha, \beta]$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος $y'_x$ τῶν ἀκολούθων πεπλεγμένων συναρτήσεων:**

**α)** $x^3+x^2y+y^2 = 0$ **β)** $\log x+e^{-\frac{y}{x}} = c$ **γ)** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$

**Ἀπάντησις. α)** Παραγωγίζομεν ὡς πρὸς x θεωροῦντες τὸ y ὡς συνάρτησιν τοῦ x καὶ λαμβάνομεν:

$$3x^2+2xy+x^2y'_x+2yy'_x = 0.$$

Ἐπιλύοντες τώρα ὡς πρὸς $y'_x$ λαμβάνομεν:

$$y'_x = -\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$$

**β)** Ἔχομεν: $\frac{1}{x} + e^{\frac{-y}{x}}\cdot\left(\frac{-y}{x}\right)'_x = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} + e^{\frac{-y}{x}}\left(-\frac{y'_x\cdot x-y}{x^2}\right) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x - e^{\frac{-y}{x}}y'_x x + e^{\frac{-y}{x}}\cdot y = 0 \Longleftrightarrow y'_x = \frac{x+e^{\frac{-y}{x}}y}{e^{\frac{-y}{x}}.x} =$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{-y}{x}}} + \frac{y}{x} = e^{\frac{x}{y}} + \frac{y}{x}.$$

**γ)** Ἔχομεν: $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}.y'_x = 0 \Longleftrightarrow y'_x = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3$ μὲ τύπους ἀντιστοίχως $f_1(x)= y= 2x^3+3x^5+x$, $f_2(x)= y= 3x - \frac{1}{2}$ συνx, $f_3(x) = y = x+e^x$.**

**Νὰ εὑρεθῇ δι' ἑκάστην τούτων ἡ $x'_y$ καὶ διὰ τὴν $f_3$ καὶ ἡ $x''_{yy}$.**

**Απάντησις.** α) Ἔχομεν $y'_x = 6x^2+15x^4+1$ καὶ ἐπειδὴ $x'_y.y'_x = 1$ θὰ ἔχωμεν:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{6x^2+15x^4+1}, \text{ ἐφ' ὅσον } y'_x \neq 0.$$

β) Ὁμοίως ἔχομεν: $y'_x = 3 + \frac{1}{2}$ ημx καὶ ἑπομένως $x'_y = \frac{2}{6+\eta\mu x}$.

γ) Ὁμοίως ἔχομεν: $y'_x = 1+e^x$ καὶ συνεπῶς $x'_y = \frac{1}{1+e^x}$ καὶ $x''_{yy} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^3}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος $y'_x$ μιᾶς συναρτήσεως f διδομένης ὑπὸ τὴν παραμετρικὴν μορφὴν $x = \alpha(t - \eta\mu t)$ καὶ $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu t)$.***

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $x'_t = \alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)$ καὶ $y'_t = \alpha\eta\mu t$ καὶ ἑπομένως: $\frac{dy}{dx} = y'_x =$

$$= \frac{\alpha\eta\mu t}{\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)} = \sigma\varphi\frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi),\ k \in Z.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21. *Ἐὰν $\rho_1, \rho_1, \rho_3$ πραγματικαὶ καὶ διακεκριμέναι ρίζαι μιᾶς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως $f(x) = 0$, νὰ δειχθῇ ὅτι:***

$$\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$$

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν, ὡς γνωστόν, $f(x) = c(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$ $(c \neq 0)$. Τότε ὅμως: $f'(x) = c(x - \rho_2)(x - \rho_3)+c(x - \rho_1)(x - \rho_3)+c(x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

Ἐπειδὴ $f'(\rho_1) = c(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)$, $f'(\rho_2) = c(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)$, $f'(\rho_3) = c(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας γίνεται:

$$\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = \frac{1}{c}\left(\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} + \frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho_3}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\right) = \frac{1}{c}.0 = 0.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22. *Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = (x-\xi)^\nu f_1(x)$, ὅπου $\nu \in N$. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχῃ ἀκρότατον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ συνάρτησις $f_1$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ καὶ $f_1(\xi) \neq 0$.***

**Ἀπάντησις.** Ἐπειδὴ $f(\xi) = 0$, ἂν $f_1(\xi) > 0$, τότε ἂν ν ἄρτιος, θὰ ἔχωμεν διὰ μίαν περιοχὴν τοῦ ξ ὅτι $f(x) > 0$ $\forall x$ τῆς περιοχῆς αὐτῆς. Ἄρα εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ ἔχομεν ἕνα ἐλάχιστον.

Ἐὰν $f_1(\xi)<0$ καὶ ν ἄρτιος θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$ ἕνα μέγιστον.

Ἀντιθέτως ἂν ν περιττὸς δὲν ἔχομεν ἀκρότατον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23. *Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ*** $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{\pi}{x} & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 0 & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$

***εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x = 0$, ἀλλ' ὄχι παραγωγίσιμος.***

**Ἀπάντησις.** Ἐπειδὴ $f(0) = 0$ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ, ὅτι καὶ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $x_\nu \mid \nu \in N$ ἀπὸ τὸ $\mathcal{D}(f) = R - \{0\}$ μὲ $x_\nu \to 0$ καὶ $x_\nu \neq 0$ $\forall \nu \in N$.

Θὰ ἔχωμεν $f(x_\nu) = x_\nu \eta\mu \frac{\pi}{x_\nu}$ καὶ ἐπειδὴ $\left|\eta\mu\frac{\pi}{x_\nu}\right| \leq 1$ $\forall x_\nu \in R - \{0\} \mid \nu \in N$ καὶ

$x_\nu \to 0$, ἔπεται, ὅτι καὶ $f(x_\nu) \to 0$ ἂν $\nu \to +\infty$. Ὥστε ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν θέσιν $x = 0$.

Ὡς πρὸς τὴν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\eta\mu \frac{\pi}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \eta\mu \frac{\pi}{x}$$ καὶ ὡς γνωστὸν δὲν ὑπάρχει τὸ $\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu \dfrac{\pi}{x}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24. Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀλλήλων διάφοροι δείξατε ὅτι ἡ ταυτότης:**

$$A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + A_\nu e^{\alpha_\nu x} \equiv 0$$

**μὲ $A_1, A_2, \ldots, A_\nu \in R$ ἰσχύει ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = 0$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐὰν $A_1 e^{\alpha_1 x} \equiv 0$ προφανῶς $A_1 = 0$. Δεχόμεθα ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu - 1$ τὸ πλῆθος προσθετέους, ἤτοι ὅτι ἐάν:

$$A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + A_{\nu-1} e^{\alpha_{\nu-1} x} \equiv 0 \text{ εἶναι } A_1 = A_2 = \ldots = A_{\nu-1} = 0.$$

Θεωροῦμεν τώρα καὶ τὴν ταυτότητα:

$$A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + A_{\nu-1} e^{\alpha_{\nu-1} x} + A_\nu e^{\alpha_\nu x} \equiv 0$$

καὶ διαιροῦντες μὲ $e^{\alpha_\nu x} \neq 0$ λαμβάνομεν:

$$A_1 e^{(\alpha_1-\alpha_\nu)x} + A_2 e^{(\alpha_2-\alpha_\nu)x} + \ldots + A_{\nu-1} e^{(\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)x} + A_\nu \equiv 0$$

Ἡ παράγωγος εἶναι:

$$(\alpha_1-\alpha_\nu)A_1 e^{(\alpha_1-\alpha_\nu)x} + (\alpha_2-\alpha_\nu)A_2 e^{(\alpha_2-\alpha_\nu)x} + \ldots + (\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)A_{\nu-1} e^{(\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)x} \equiv 0$$

Καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν $\nu - 1$ προσθετέους θὰ εἶναι:

$$(\alpha_1-\alpha_\nu)A_1 = 0,\ (\alpha_2-\alpha_\nu)A_2 = 0, \ldots, (\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)A_{\nu-1} = 0$$

ἀλλὰ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ διάφοροι ἀλλήλων, ὅτε: $A_1 = A_2 = \ldots = A_{\nu-1} = 0$ καὶ συνεπῶς καὶ $A_\nu = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25. Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in R$, προσδιορίσατε αὐτὰ οὕτως ὥστε ἡ παράγωγος τῆς f μὲ $f(x) = (x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu)e^x$ νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ $x^\nu e^x$, $\nu \in N$.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $f'(x) = \pi(x)e^x + e^x(\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_1 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1}) \equiv [x^\nu + (\alpha_1+\nu)x^{\nu-1} + [\alpha_2 + \alpha_1(\nu-1]x^{\nu-2} + \ldots + (\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1})]e^x$.

Καὶ διὰ νὰ εἶναι $f'(x) \equiv x^\nu e^x$ θὰ πρέπει:

$$\alpha_1 + \nu = 0 \quad \alpha_2 + (\nu-1)\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = 0$$

Ἑπομένως: $\alpha_1 = -\nu$, $\alpha_2 = -(\nu-1)\alpha_1$, $\alpha_3 = -(\nu-2)\alpha_2, \ldots$ καὶ γενικῶς:

$$\alpha_k = -(\mu - k + 1)\alpha_{k-1}$$

Αἱ ὁποῖαι διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη δίδουν:

$$\alpha_k = (-1)^k \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-k+1)$$

Ἐκ ταύτης δίδοντες εἰς τὸν k τὰς τιμὰς $1, 2, 3, \ldots, \nu$ λαμβάνομεν τοὺς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x) = \log x$ $(x > 0)$ δὲν δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν**

$$\log x = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$ **ὅπου $F_1(x)$, $F_2(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐκ τῆς ταυτότητος $\log x = \dfrac{F_1(x)}{F_2(x)}$ διὰ παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{x} \equiv \frac{F'_1(x)F_2(x) - F_1(x)F'_2(x)}{[F_2(x)]^2} \Longleftrightarrow [F_2(x)]^2 \equiv xF'_1(x).F_2(x) - xF_1(x)F'_2(x)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $\beta\alpha\theta F_1(x) = \nu \in N$ καὶ $\beta\alpha\theta F_2(x) = \nu' \in N$ μὲ $\nu \neq \nu'$, τότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἄνω ταυτότητος θὰ ἦτο βαθμοῦ $2\nu$ καὶ τὸ δεύτερον βαθμοῦ $\nu+\nu'$ καὶ ἐπειδὴ $\nu \neq \nu'$, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ δύο μέλη διαφορετικοὺς βαθμούς, ἄτοπον.

Ἐὰν $\nu = \nu'$ τότε τὸ πρῶτον μέλος θὰ εἶναι βαθμοῦ $2\nu$, ἐνῷ τὸ δεύτερον θὰ ἦτο βαθμοῦ τὸ πολὺ $2\nu - 1$ καὶ πάλιν ἄτοπον. Ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ταυτότης εἶναι ἀδύνατος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ καὶ μὲ $\mathfrak{D}(f) = [1, 2]$. Νὰ εὑρεθῇ $\xi \in (1, 2)$ οὕτως ὥστε $f'(\xi) = 0$.**

**Ἀπάντησις.** Κατ' ἀρχὴν ἡ f ὡς συνάρτησις πολυωνυμικὴ εἶναι συνεχὴς $\forall x \in [1, 2]$ καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in (1, 2)$. Ἐπὶ πλέον $f(1) = f(2) = 0$. Ὥστε διὰ τὴν f ἐν $[1, 2]$ πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τοῦ Rolle καὶ τότε ὑπάρχει $\xi \in (1, 2)$ οὕτως ὥστε $f'(\xi) = 0$.

Ἐπειδὴ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ θὰ ἔχωμεν: $3\xi^2 - 12\xi + 11 = 0$. Ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν: $\xi = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$. Προφανῶς $\xi = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \in (1, 2)$.

Τὸ ὅτι μία μόνον ρίζα εὑρίσκεται μεταξὺ 1 καὶ 2 δεικνύεται καὶ ἀπὸ τὸ ὅτι $f'(1) f'(2) < 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28. Δείξατε, ὅτι: $e^x \geqq 1+x$ $\forall x \in R$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν ἀποδείξει τὴν πρότασιν καὶ ἄλλοτε. Τὴν ἀποδεικνύομεν τώρα μέσῳ τῶν παραγώγων.

Ἡ συνάρτησις $f(x) = e^x - x - 1$ εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in R$. Εἶναι δὲ $f'(x) = e^x - 1$ $\forall x \in R$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $f''(x) = e^x > 0$ $\forall x \in R$. Ἐπειδὴ $f''(x) > 0$ $\forall x \in R$, ἕπεται ὅτι ἡ $f'(x) = e^x - 1$ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐν R.

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x = 0$ εἶναι $f'(0) = 0$ καὶ ἑπομένως διὰ $x<0$ εἶναι $f'(x)<0$ καὶ διὰ $x>0$ εἶναι $f'(x)>0$.

Ἐπειδὴ διὰ $x<0$ εἶναι $f'(x)<0$, ἕπεται ὅτι **ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα διὰ $x < 0$** καὶ ἐπειδὴ διὰ $x>0$ εἶναι $f'(x)>0$ ἕπεται ὅτι **ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα διὰ $x > 0$**. Ὥστε $f(x)>f(0)$ διὰ $x>0 \Longleftrightarrow e^x - x - 1>0$ διὰ $x>0$ καὶ $f(x)>f(0)$ διὰ $x<0 \Longleftrightarrow e^x - x - 1>0$ διὰ $x<0$. Ἄρα $e^x \geqq 1+x$ $\forall x \in R$, ὅπου ἡ ἰσότης λαμβάνει χώραν μόνον διὰ $x = 0$.

**Ἄλλος τρόπος** διὰ τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = e^x$ $\forall x \in R$. Ἐὰν $x \neq 0$, τότε ἡ f εἰς κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $[0, x]$ ἢ $[x, 0]$ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος. Ἑπομένως ἡ $f(x) = e^x$ πληροῖ τὰς προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς ἐν $[0, x]$ ἢ ἐν $[x, 0]$. Τότε ὅμως ὑπάρχει $\xi \in [0, x]$ ἢ καὶ ἐν $[x, 0]$ οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ ἢ } f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x}$$

δηλαδή: $f'(\xi) = \frac{e^x - 1}{x}$ $\forall x \in R - [0]$.

Ἀλλὰ $f'(x) = e^x$ καὶ ἑπομένως: $f'(\xi) = e^\xi > 0$, ὁπότε: $xe^\xi = e^x - 1 \Longleftrightarrow e^x = xe^\xi + 1$.
Ἐὰν τώρα: $0<\xi<x$ τότε $e^\xi > 1 \Rightarrow xe^\xi > x$ καὶ $xe^\xi + 1 > x+1 \Rightarrow e^x > x+1$.
Ἐὰν $x<\xi<0$ τότε $e^\xi<1 \Rightarrow xe^\xi>x$ καὶ $xe^\xi+1>x+1 \Rightarrow e^x>x+1$.
Τελικῶς ἔχομεν: $e^x \geqq x+1$ $\forall x \in R$, ὅπου ἡ ἰσότης λαμβάνει χώραν μόνον ὅταν $x = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 29. Ἀποδείξατε ὅτι: $\nu x^{\nu-1}(x - y) \geqq x^\nu - y^\nu \geqq \nu y^{\nu-1}(x - y)$, ὅπου $x, y \in R$ μὲ $x \geqq y > 0$ καὶ $\nu \in N$.**

**Ἀπόδειξις.** Εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν $x = y$ ἰσχύει ἡ ἰσότης. Ἔστω λοιπὸν $x > y > 0$. Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη μὲ $y^\nu$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\nu\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu-1}\left(\frac{x}{y}-1\right) > \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu}-1 > \nu\left(\frac{x}{y}-1\right) \Longleftrightarrow \nu\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu-1} > \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu}-1}{\frac{x}{y}-1} \geqq \nu$$

ποὺ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(\omega) = \omega^\nu \mid \nu \in N$. Εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ f συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall \omega \in R$ καὶ $\nu \in N$ καὶ ἑπομένως ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις τοῦ θεωρ. τῆς μέσης τιμῆς. Ἐπειδὴ $x>y>0$, ἂν θεωρήσωμεν τὴν f μὲ $\mathcal{D}(f) = [1, \omega_1]$, $(\omega_1 \neq 1)$, τότε θὰ ὑπάρχῃ $\xi \in (1, \omega_1)$ οὕτως ὥστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\omega_1)-f(1)}{\omega_1 - 1}$.

Εἶναι ὅμως: $f'(x) = \nu\omega^{\nu-1}$ $\forall \omega \in (1, \omega_1)$ ἄρα: $\nu\xi^{\nu-1}(\omega_1 - 1) = \omega_1{}^\nu - 1$.

Ἀλλά: $1<\xi<\omega_1 \Longrightarrow 1<\xi^{\nu-1}<\omega_1{}^{\nu-1} \Longrightarrow \nu < \dfrac{\omega_1{}^\nu - 1}{\omega_1 - 1} < \nu\omega_1{}^{\nu-1}$

καὶ ἂν $\omega_1 = \dfrac{x}{y}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\nu < \frac{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu}-1\right)}{\frac{x}{y}-1} < \nu\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu-1}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30. Ἐὰν $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$, τότε: $\varepsilon\varphi x + 2\eta\mu x \geqq 3x$.**

**Ἀπόδειξις.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \varepsilon\varphi x + 2\eta\mu x - 3x$ μὲ $\mathcal{D}(f) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ καὶ προφανῶς $f(0) = 0$.

Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2\sigma\upsilon\nu x - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2\cdot(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Προφανῶς $f'(x)>0$ $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ἑπομένως ἡ f αὔξουσα γνησίως ἐν $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ καὶ ἑπομένως ἂν $x \geqq 0$ θὰ εἶναι καὶ $f(x) \geqq f(0)$, ἤτοι:

$$\varepsilon\varphi x + 2\eta\mu x - 3x \geqq 0 \Longleftrightarrow \varepsilon\varphi x + 2\eta\mu x \geqq 3x \;\; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 31. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $k \in R$ ἡ ἐξίσωσις $f(x) \equiv x^4 - 14x^2 + 24x - k = 0$ ἔχει 4 ρίζας πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 \equiv 4(x-2)(x+3)(x-1)$.

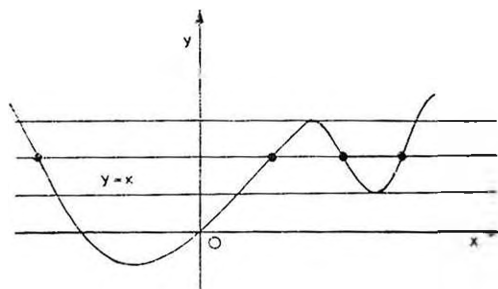
Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle αἱ ρίζαι τῆς $f(x) = 0$ πρέπει νὰ χωρίζωνται ἀπὸ τὰς ρίζας τῆς παραγώγου $f'(x) = 0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι —3, 1, 2.

Θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκόλουθον σειρὰν σημείων:

| x | $-\infty$ | $-3$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | —117—k | 11—k | 8—k | + |

Πρέπει νὰ εἶναι : $+, -, +, -, +$ καὶ ἑπομένως : $-117-k<0$, $11-k>0$, $8-k<0$, ἤτοι $8<k<11$.

Γραφικῶς ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $y=x^4-14x^2+$ $+24x$ εἶναι ἡ τοῦ κάτωθι σχήματος :




Καὶ διὰ νὰ ὑπάρχουν 4 λύσεις πρέπει ἡ $y=k$ νὰ τέμνῃ τὸ διάγραμμα εἰς τέσσαρα σημεῖα, τὸ ὁποῖον διὰ νὰ συμβαίνῃ πρέπει $8<k<11$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 32. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f συνεχῆ ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμον $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Ἐὰν $f(\alpha)=f(\beta)$ δείξατε ὅτι ὑπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεῖα $\xi_1, \xi_2$ $\in (\alpha, \beta)$ οὕτως ὥστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$, μὲ $\xi_1 \neq \xi_2$.**

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$, ἕπεται ὅτι εἰς τὰ διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ καὶ $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ ἡ f εἶναι ἐπίσης συνεχὴς εἰς ἕκαστον τούτων καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ καθὼς καὶ εἰς τὸ $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν διὰ τὴν f τὸ θεώρημα μέσης τιμῆς εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν διαστημάτων αὐτῶν.

Κατόπιν τούτου ὑπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{2}{\beta-\alpha}\left(f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)\right)$$

καὶ ὑπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ οὕτως ὥστε :

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2}{\beta-\alpha}\left[f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

καὶ τότε προφανῶς :

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 33. Ἀποδείξατε ὅτι : $\frac{1}{x}<\frac{\log x}{x-1}<1 \ \forall x \in (1, +\infty)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ $x>1$ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι: $\log x<x-1$ $\forall x\in(1,+\infty)$ καὶ $x\log x>x-1$ $\forall x\in(1,+\infty)$. Διὰ τὴν $\log x<x-1$. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x)=\log x-x+1$ καὶ $\mathcal{D}(f)=[1,+\infty)$. Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι συνεχὴς $\forall x\in[1,+\infty)$ καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(1,+\infty)$ ὑπάρχει $\xi$ ἐν $(1,x)$ οὕτως ὥστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Ἀλλὰ $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$ $\forall x\in(1,+\infty)$ καὶ ἐπομένως $f'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}-1<0$ καὶ θὰ ἔχωμεν:

$f(x)=(x-1)f'(\xi)<0$ (διότι $f(1)=0$], ἤτοι: $\log x-x+1<0$ καὶ ἄρα: $\log x<x-1$ $\forall x\in(1,+\infty$.

Ὁμοίως ἂν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x)=x\log x-x+1$ αὕτη εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[1,+\infty)$ καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(1,+\infty)$ καὶ ἄρα ὑπάρχει $\xi\in(1,x)$ οὕτως ὥστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Ἀλλὰ $f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\log x$ $\forall x\in(1,+\infty)$ καὶ ἄρα $f'(\xi)=\log\xi>0$ ἀφοῦ $\xi>1$.

Ὥστε: $f(x)-f(1)=(x-1)f'(\xi)>0$ καὶ $f(1)=0$, ὁπότε: $f(x)>0 \Longleftrightarrow x\log x>x-1$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 34. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(x-1)e^{x}=(x+1)e^{-x}$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς δύο, καὶ μόνον δύο.**

**Ἀπόδειξις.** Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x)=(x-1)e^{x}-(x+1)e^{-x}$ ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι συνεχὴς $\forall x\in R$ καὶ παραγωγίσιμος.

Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι:

$$f'(x)=e^{x}+(x-1)e^{x}-e^{-x}+(x+1)e^{-x}=x(e^{x}+e^{-x}).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x>0$ εἶναι $f'(x)>0$ καὶ ἐπομένως ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐν $(0,+\infty)$. Ἀλλὰ $f(0)=-2$ καὶ $f(+\infty)=+\infty$, δηλαδὴ τὸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)$

$$\left[\frac{x-1}{x+1}e^{x}-e^{-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}e^{x}-e^{-x}\right)=+\infty\cdot(1\cdot\infty-0)=+\infty,$$

ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι $-2\leqq f(x)<+\infty$ $\forall x\in(0,+\infty)$. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $(0,+\infty)$, ἕπεται ὅτι μηδενίζεται μίαν, καὶ μόνον μίαν, φορὰν εἰς τὸ ἐν λόγῳ διάστημα ἀφοῦ εἶναι καὶ γνησίως αὔξουσα. Μία ἀκριβῶς ὁμοία ἐργασία διὰ τὸ διάστημα $(-\infty,0)$ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη μία, καὶ μόνον μία, ρίζα ἐν $(-\infty,0)$.

Ἐπειδὴ δὲ $f(0)\neq 0$ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητική.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 35. Ἀνισότης Bernoulli (γενίκευσις). Ἀποδείξατε ὅτι:**

**1) $(1+x)^{\rho}<1+\rho x$ μὲ $0<\rho<1$ καὶ $x>0$ ἢ $-1<x<0$**

**2) $(1+x)^{\rho}\geqq 1+\rho x$ μὲ $\rho\geqq 1$ ἢ $\rho\leqq 0$ καὶ $x>-1$**

**Ἀπόδειξις.** Θὰ μελετήσωμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x)=(1+x)^{\rho}$ κατ' ἀρχὴν εἰς τὸ διάστημα $(-1,0)$ καὶ ἀκολούθως εἰς τὸ διάστημα $(0,+\infty)$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $[-1,0]$ καὶ παραγωγίσιμος $\forall x\in(-1,0)$.

Ὑποθέτομεν βεβαίως $\rho\neq 0$, διότι διὰ $\rho=0$. Προφανῶς ἰσχύει ὡς ἰσότης.

Θεωροῦμεν τώρα τὸ τυχὸν διάστημα $[x,0]\subset[-1,0]$ εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ὑπάρχῃ $\xi\in(x,0)$ οὕτως ὥστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(0)-f(x)}{0-x}$.

Προφανῶς: $-1<\xi$ καὶ $x<\xi<0$. Εἶναι δὲ $f'(x)=\rho(1+x)^{\rho-1}$ καὶ ἄρα $f'(\xi)=\rho(1+\xi)^{\rho-1}>0$. Θὰ ἔχωμεν: $xf'(\xi)=f(x)-f(0) \iff xf'(\xi)=(1+x)^\rho-1$.

Ἔστω τώρα ὅτι $0<\rho<1$, τότε $xf'(\xi)=x\rho(1+\xi)^{\rho-1}=\dfrac{x\rho}{(1+\xi)^{\rho-1}}<x\rho$, διότι $x\rho<0$ καὶ $\dfrac{1}{(1+\xi)^{1-\rho}}>1 \iff (1+\xi)^{1-\rho}<1 \iff 1+\xi<1 \iff \xi<0$, ποὺ ἰσχύει.

Τότε ὅμως θὰ εἶναι καί: $(1+x)^\rho-1<x\rho \iff (1+x)^\rho<1+x\rho$. **Ἔστω $\rho\geq 1$, τότε** $xf'(\xi)=x\rho(1+\xi)^{\rho-1}>x\rho$, ἀφοῦ $x\rho<0$ καὶ ἑπομένως: $(1+x)^\rho-1>x\rho \iff (1+x)^\rho>1+x\rho$.

Ἔστω $\rho<0$, τότε $xf'(\xi)=x\rho(1+\xi)^{\rho-1}=\dfrac{x\rho}{(1+\xi)^{1-\rho}}>x\rho$ ἀφοῦ $x\rho>0$ καὶ ἑπομένως:

$$(1+x)^\rho-1>x\rho \iff (1+x)^\rho>1+x\rho.$$

Εἰς τὸ διάστημα τώρα $[0,+\infty)$ ἡ f εἶναι συνεχὴς παραγωγίσιμος $\forall x\in(0,+\infty)$. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τυχὸν διάστημα $[0,x]\subset[0,+\infty)$, τότε ὑπάρχει $\xi\in(0,x)$ οὕτως ὥστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

ποὺ προφανῶς $\xi>0$ καὶ $0<\xi<x$. Θὰ ἔχωμεν: $xf'(\xi)=(1+x)^\rho-1$.

Ἐὰν $\rho\geq1$, τότε $xf'(\xi)=x\rho(1+\xi)^{\rho-1}>x\rho$, ἄρα $(1+x)^\rho-1>x\rho \Rightarrow (1+x)^\rho>1+x\rho$.

Ἐὰν $0<\rho<1$, τότε: $xf'(\xi)=x\rho(1+\xi)^{\rho-1}<x\rho$ καὶ ἄρα $(1+x)^\rho-1<x\rho \iff$ $\iff (1+x)^\rho<1+x\rho$.

Ἐὰν $\rho<0$, τότε $xf'(\xi)=x\rho(1+\xi)^{\rho-1}>x\rho$ (διότι $x\rho<0$) καὶ ἄρα $(1+x)^\rho-1>x\rho$ $\iff (1+x)^\rho>1+x\rho$.

Ἑπομένως ἡ πρότασις ἐδείχθη πλήρως.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36. Διὰ τὴν συνάρτησιν f ἰσχύει: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ $\forall x, \forall y\in R$ καὶ ἀκόμη ὅτι $f(x)=1+x\sigma(x)$ $\forall x\in R$, ὅπου διὰ τὴ σ ἰσχύει: $\lim\limits_{x\to0}\sigma(x)=1$. Ἀποδείξατε ὅτι ὑπάρχει ἡ f′ $\forall x\in R$ καὶ ὅτι εἶναι: $f(x)=e^x$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἡ συνάρτησις f εἶναι παντοῦ ὡρισμένη ἐξ ὑποθέσεως. Διὰ $x=y=0$ λαμβάνομεν: $f(0)=f^2(0)$ καὶ ἑπομένως $f(0)=1$ ἢ $f(0)=0$ καὶ ἐκ τῆς $f(x)=1+x\sigma(x)$ διὰ $x=0$ ἔχομεν: $f(0)=1$, ἄρα $f(0)\neq0$.

Ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x=x_0\in R$ θὰ εἶναι:

$$f'(x_0)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(x_0).f(\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}=f(x_0).\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon},\ (\varepsilon\neq0).$$

Ἀλλὰ ἐκ τῆς $f(x)=1+x\sigma(x)$ $\forall x\in R$ ἔχομεν: $f(\varepsilon)=1+\varepsilon\sigma(\varepsilon) \Rightarrow \sigma(\varepsilon)=\dfrac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon}$ καὶ ἑπομένως: $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\sigma(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon}=1$.

Κατόπιν τούτου: $f'(x_0)=f(x_0)$ καὶ τοῦτο $\forall x_0\in R$, ἤτοι: ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f $\forall x\in R$ καὶ ἰσχύει: $f'(x)=f(x)$ $\forall x\in R$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ μόναι συναρτήσεις διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύει: $f'(x)=f(x)$ $\forall x\in R$ εἶναι αἱ συναρτήσεις τοῦ τύπου $f(x)=ce^x$, ὅπου c σταθερὰ ἐν R. Πράγματι ἂν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$, τότε $F'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-(e^x)'.f(x)}{(e^x)^2}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}=$ $=0$ $\forall x\in R$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ F εἶναι μία σταθερὰ $\forall x\in R$.

Ἑπομένως: $f(x)=ce^x$.

Εἰς τὴν περίπτωσίν μας διὰ $x=0$ θὰ ἔχωμεν: $f(0)=c.e^0=c=1$.

Ἄρα $f(x)=e^x$ $\forall x\in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 37. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ αἱ ὁποῖαι εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ $[\alpha,\beta]$ καὶ παραγωγίσιμοι εἰς αὐτό. Ἐὰν $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ καὶ $f'_1(x) > f'_2(x)$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$, τότε καὶ $f_1(x) > f_2(x)$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$.**

**Ἀπάντησις.** Θεωροῦμεν πρὸς τοῦτο τὴν συνάρτησιν F μὲ $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Αὕτη εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ $[\alpha,\beta]$ καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Ἐπὶ πλέον $F(\alpha)=f_1(\alpha)-f_2(\alpha) = 0$.

Ἐπειδὴ $F'(x) = f'_1(x) - f'_2(x) > 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$, ἕπεται ὅτι ἡ F εἶναι γνησίως αὔξουσα εἰς τὸ $(\alpha,\beta)$ καὶ ἐπειδὴ $F(\alpha)=0$ θὰ εἶναι: $F(x)>F(\alpha)=0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$, ἤτοι $F(x)>0 \iff f_1(x)>f_2(x)$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 38. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $e^x - xe^x = 1$. Ἀποδείξατε ὅτι δὲν ἔχει πραγματικὴν λύσιν ἄλλην ἐκτὸς τῆς $x = 0$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἡ συνάρτησις $f(x) = e^x - xe^x - 1$ εἶναι προφανῶς συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in R$ καὶ $f(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ὑπάρχει $\rho \in R$, $\rho \neq 0$ οὕτως ὥστε $f(\rho) = 0$.

Ἡ συνάρτησις $f(x) = e^x - xe^x - 1$ εἶναι παντοῦ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐν $[0,\rho]$ ἢ ἐν $[\rho,0]$ καὶ παραγωγίσιμος. Καὶ ἐπειδὴ $f(\rho) = f(0) = 0$ πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ Rolle ἐν $[0,\rho]$ ἢ ἐν $[\rho,0]$. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι:

$$f'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x, \ \forall x \in [0,\rho] \text{ ἢ ἐν } [\rho,0]$$

καὶ ἑπομένως ὑπάρχει $\xi \in [0,\rho]$ ἢ ἐν $[\rho,0]$ οὕτως ὥστε $f'(\xi) = 0 \iff -\xi e^{\xi} = 0$, ποὺ προφανῶς εἶναι ἄτοπον, ἀφοῦ $\xi \neq 0$. Ὥστε δὲν ὑπάρχει $\rho \in R$ $\rho \neq 0$ οὕτως ὥστε $f(\rho) = 0$.

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ἄλλην ρίζαν πραγματικὴν ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 39. Ἐὰν $x^2 < \frac{1}{2}$ ἀποδείξατε ὅτι:**

$$\text{τοξ}_0\text{ημ}x + 3\text{τοξ}_0\text{συν}x + \text{τοξ}_0\text{ημ}\, 2x\sqrt{1-x^2}$$

**εἶναι μία σταθερά. Ποία ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς;**

**Ἀπάντησις.** Ἔστω $f(x) = \text{τοξ}_0\text{ημ}x + 3\text{τοξ}_0\text{συν}x + \text{τοξ}_0\text{ημ}2x\sqrt{1-x^2}$ θὰ ἔχωμεν:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-4x^2\cdot(1-x^2)}}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+\frac{1}{(1-2x^2)}\cdot\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \text{ καὶ ἑπομένως } f(x) = c. \ \forall x \in R \text{ μὲ } x^2 < \frac{1}{2}.$$

Διὰ $x = 0$ λαμβάνομεν:

$$c = f(0) = 0 + 3\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 40. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\nu^{\eta}$ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) =$ συν$\alpha x$ $(\alpha \in R)$.**

**Τῇ βοηθείᾳ τῆς σχέσεως ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ εὕρετε τὰς νυοστὰς παραγώγους τῶν συναρτήσεων $f_1(x) = \text{ημ}^2x$ καὶ $f_2(x) = \text{συν}^2x$.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $\mathcal{D}(f) = R$ καὶ $f'(x) = -\alpha\text{ημ}(\alpha x) = \alpha\text{συν}\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f''(x) = -\alpha^2\text{ημ}\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha^2\text{συν}\left(\alpha x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha^2\text{συν}\left(\alpha x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Ἔστω, ὅτι $f^{(\nu)}(x) = \alpha^\nu \sigma\upsilon\nu\left(\alpha x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$, $\nu \in N$ (1).

Παραγωγίζοντες τὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητος λαμβάνομεν:

$$f^{(\nu+1)}(x) = -\alpha^{\nu+1}\eta\mu\left(\alpha x + \nu\frac{\pi}{2}\right) = \alpha^{\nu+1}\sigma\upsilon\nu\left(\alpha x + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \alpha^{\nu+1}\sigma\upsilon\nu\left(\alpha x + (\nu+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Ἑπομένως ὁ τύπος (1) ἰσχύει $\forall \nu \in N$.

Θέτομεν τώρα συν2x = ω καὶ τότε:

$$f_1(x) = \eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} = \frac{1-\omega}{2} \text{ καὶ } f_2(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} = \frac{1+\omega}{2}$$

Θὰ ἔχωμεν: $f_1^{(\nu)}(x) = -\frac{1}{2}\omega^{(\nu)}(x)$ καὶ $f_2^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2}\omega^{(\nu)}(x)$.

Ἀλλὰ δυνάμει τοῦ προηγηθέντος θὰ ἔχωμεν: $\omega^{(\nu)}(x) = 2^\nu \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\nu\pi}{2}\right)$ καὶ ἑπομένως: $f_1^{(\nu)}(x) = -2^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\nu\pi}{2}\right)$ καὶ $f_2^{(\nu)}(x) = 2^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\nu\pi}{2}\right)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 41. Θεωροῦμεν τὴν πολυωνυμικὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ $\alpha_0 \neq 0$ (1) μὲ συντελεστὰς ἐν R καὶ βαθμοῦ ν.**

**Ὑποθέτομεν ὅτι αὐτὴ ἔχει ν διακεκριμένας ρίζας διαφόρους τοῦ μηδενός.**

**Ἐὰν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ αἱ ρίζαι νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:**

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{καὶ} \quad \frac{f''(x)}{f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2.$$

**Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα:**

$$\alpha)\ \sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\rho_i} \qquad \beta)\ \sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\rho_i^2} \qquad \gamma)\ \sum_{i<j}^{\nu}\frac{1}{\rho_i\,\rho_j}$$

**Ἀπάντησις.** Ἐκ τῆς (1) προκύπτει:

$$\frac{1}{\alpha_0}f(x) = x^\nu + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}x^{\nu-1} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$$

καὶ ἂν $\frac{1}{\alpha_0}f(x) = F(x)$ καὶ $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$ τεθοῦν ἀντιστοίχως $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ λαμβάνομεν:

$$F(x) = x^\nu + \lambda_1 x^{\nu-1} + \lambda_2 x^{\nu-2} + \ldots + \lambda_\nu \tag{2}$$

Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα f(x) καὶ F(x) ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας, θὰ ἔχωμεν:

$$F(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$$

καὶ ἡ παράγωγος εἶναι:

$F'(x) = (x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu) + (x-\rho_1)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu) + \ldots + (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$ καὶ ἑπομένως:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \ldots + \frac{1}{x-\rho_\nu}. \tag{3}$$

Παραγωγίζοντες τώρα ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ταυτότητος (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{F''(x)F(x) - [F'(x)]^2}{[F(x)]^2} = -\frac{1}{(x-\rho_1)^2} - \frac{1}{(x-\rho_2)^2} - \ldots - \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} - \left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)^2 = -\left(\frac{1}{(x-\rho_1)^2} + \frac{1}{(x-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}\right) \quad (4)$$

Εἰς τὴν σχέσιν (3) θέτομεν $x = 0$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{F'(0)}{F(0)} = -\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} - \ldots - \frac{1}{\rho_\nu}$$

καὶ ἑπομένως: $$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_i} = -\frac{F'(0)}{F(0)}$$

Εἶναι ὅμως: $F'(x) = \nu x^{\nu-1} + \lambda_1(\nu-1)x^{\nu-2} + \ldots + \lambda_{\nu-1}$ καὶ ἄρα: $F'(0) = \lambda_{\nu-1}$.

Ὥστε: $$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_i} = -\frac{\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}, \text{ διότι } F(0) = \lambda_\nu \neq 0.$$

Εἰς τὴν σχέσιν (4) θέτομεν $x = 0$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{F''(0)}{F(0)} - \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 = -\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} - \ldots - \frac{1}{\rho_\nu^2}$$

καὶ συνεπῶς: $$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_i^2} = \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 - \frac{F''(0)}{F(0)} \quad (5)$$

Ἀλλά: $$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_i}\right)^2 - 2\sum_{i<j} \frac{1}{\rho_i \rho_j} \text{ ὁπότε:}$$

$$2\sum_{i<j} \frac{1}{\rho_i \rho_j} = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_i^2} = \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 - \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 + \frac{F''(0)}{F(0)}$$

$$\text{καὶ ἄρα: } \sum_{i<j} \frac{1}{\rho_i \rho_j} = \frac{1}{2}\frac{F''(0)}{F(0)} \quad (6)$$

Ἐπειδὴ $F(0) = \lambda_\nu$, $F'(0) = \lambda_{\nu-1}$ καὶ $F''(0) = 2\lambda_{\nu-2}$. Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) ἔχομεν τὰ τελικὰ ἐξαγόμενα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 42. Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x)$ ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς καὶ διακεκριμένας, τότε τὸ πολυώνυμον: $[\pi'(x)]^2 - \pi(x)\pi''(x)$ οὐδεμίαν πραγματικὴν ρίζαν δέχεται.**

**Ἀπόδειξις.** Εἰς τὸ παράδ. 41 εἴδωμεν ὅτι ἰσχύει:

$$\frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \ldots + \frac{1}{x-\rho_\nu} \quad (1)$$

ὅπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ αἱ πραγματικαὶ καὶ διακεκριμέναι ρίζαι τοῦ $\pi(x)$.

Ἐκ τῆς (1) διὰ παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{\pi''(x)\pi(x) - [\pi'(x)]^2}{[\pi(x)]^2} = -\frac{1}{(x-\rho_1)^2} - \frac{1}{(x-\rho_2)^2} - \ldots - \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}$$

$$= -\left[\frac{1}{(x-\rho_1)^2} + \frac{1}{(x-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}\right] \quad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $\forall x \in R$ διάφορον τῶν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) εἶναι ἀρνητικόν.

Ἑπομένως καὶ $\pi''(x)\pi(x) - [\pi'(x)]^2 < 0$ $\forall x \in R$ διάφορον τῶν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$.

Συνεπῶς δὲν ὑπάρχει $x \in R$ διὰ τὸ ὁποῖον τὸ πολυώνυμον $[\pi'(x)]^2 - \pi(x)\pi''(x)$ νὰ λαμβάνῃ τιμὴν 0 καὶ ἄρα οὐδεμίαν δέχεται πραγματικὴν λύσιν. Τὸ $\pi(x)$ καὶ τὸ

$\pi''(x)\,\pi(x) - [\pi'(x)]^2$ οὐδεμίαν ἔχουν κοινὴν ρίζαν. Διότι ἂν $\rho \in R$ οὕτως ὥστε $\pi(\rho) = 0$ καὶ $\pi''(\rho).\pi(\rho) - [\pi'(\rho)]^2 = 0$ θὰ ἦτο καὶ $\pi'(\rho) = 0$ καὶ τότε τὸ ρ θὰ ἦτο ρίζα τῆς παραγώγου, ἤτοι διπλῆ ρίζα τοῦ $\pi(x)$, ἄτοπον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 43. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f παραγωγίσιμον εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ καὶ μορφώνομεν τὴν συνάρτησιν $F(x) = [f(x)]^2$. Ἐὰν ξ ρίζα τῆς $f(x) = 0$ δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον $f(x)f'(x)$ ἀλλάσσει πρόσημον εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ.**

**Ἀπάντησις.** Θεωροῦμεν τὴν περιοχὴν $[\xi_1, \xi_2]$ μὲ $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ καὶ $f(\xi) = 0$ καὶ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη ρίζα εἰς τὴν ἐν λόγῳ περιοχήν.

Ἡ παράγωγος τῆς F εἶναι: $F'(x) = 2f(x)f'(x)$ καὶ προφανῶς: $F'(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi) = 0$.

Ἐπειδὴ ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ παράγωγος τῆς F εἰς τὴν θέσιν αὐτήν.

Ὥστε ἡ F εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὴν θέσιν $x = \xi$.

Θεωροῦμεν τώρα τὰ διαστήματα $[\xi_1, \xi]$ καὶ $[\xi, \xi_2]$. Εἰς ἕκαστον τούτων ἡ F εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς ὑπάρχει $\gamma_1 \in (\xi_1, \xi)$ οὕτως ὥστε:

$$F(\xi) - F(\xi_1) = (\xi - \xi_1)F'(\gamma_1) \text{ μὲ } \xi_1 < \gamma_1 < \xi$$

καὶ ὑπάρχει $\gamma_2 \in (\xi, \xi_2)$ οὕτως ὥστε:

$$F(\xi_2) - F(\xi) = (\xi_2 - \xi)F'(\gamma_2) \text{ μὲ } \xi < \gamma_2 < \xi_2$$

Ἀλλὰ $F(\xi) = 0$ καὶ ἑπομένως:

$$-F(\xi_1) = (\xi - \xi_1)F'(\gamma_1) \text{ μὲ } \xi_1 < \gamma_1 < \xi$$

καὶ

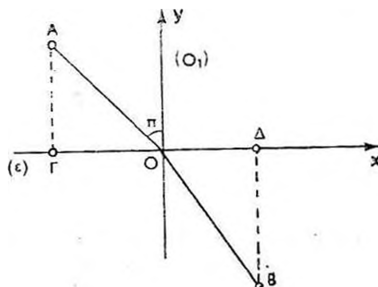
$$F(\xi_2) = (\xi_2 - \xi)F'(\gamma_2) \text{ μὲ } \xi < \gamma_2 < \xi_2$$

Ἐπειδὴ $F(x) = [f(x)]^2 \Rightarrow F(\xi_1) > 0$, $F(\xi_2) > 0$ καὶ ἑπομένως. $F'(\gamma_1) < 0$ καὶ $F'(\gamma_2) > 0$.

Ἐπειδὴ ἡ παράγωγος $F'(x) = 2f(x)f'(x)$ δὲν μηδενίζεται εἰς τὸ $[\xi, \xi_1)$ καὶ γίνεται ἀρνητικὴ διὰ $x = \gamma_1$ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἀρνητικὴ $\forall x \in (\xi_1, \xi)$ καὶ ὁμοίως θὰ εἶναι θετικὴ $\forall x \in (\xi, \xi_2)$. Ἑπομένως τὸ γινόμενον $f(x)f'(x)$ ἀλλάσσει πρόσημον εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ξ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 44. Εἰς τὴν διάθλασιν τοῦ φωτός, ἵνα τὸ φῶς μεταβῇ ἀπὸ κάποιο σημεῖον Α ἑνὸς ὀπτικοῦ μέσου $(O_1)$ εἰς ἕνα σημεῖον Β ἑνὸς ἄλλου ὀπτικοῦ μέσου $(O_2)$ ἀκολουθεῖ πορείαν τοῦ ἐλαχίστου δυνατοῦ χρόνου.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ μέσον $(O_1)$ εἶναι $v_1$ καὶ εἰς τὸ μέσον $(O_2)$ εἶναι $v_2$. Ἐὰν (ε) ἡ διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια τῶν δύο μέσων, ζητοῦμεν νὰ



εὕρωμεν διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς (ε) ὁ χρόνος διαδρομῆς τοῦ φωτὸς ἀπὸ Α εἰς Β εἶναι ἐλάχιστος.

Ἔστω (ΓΟ) = x καὶ (ΓΔ) = λ, ὅτε (ΟΔ) = λ — x.

Ἐὰν (ΑΓ) = α καὶ (ΒΔ) = β, ὁ χρόνος t τῆς διαδρομῆς ἀπὸ Α εἰς Β θὰ εἶναι:

$$t = \frac{(\mathrm{AO})}{v_1} + \frac{(\mathrm{BO})}{v_2} = \frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\beta^2+(\lambda-x)^2}}{v_2} = f(x)$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ χρόνος t εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, ἤτοι $t = f(x)$.

Ἡ παράγωγος εἶναι:

$$f'(x) = \frac{1}{v_1}\,\frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} + \frac{1}{v_2}\,\frac{x-\lambda}{\sqrt{\beta^2+(\lambda-x)^2}}$$

Καὶ διὰ νὰ ἔχωμεν ἐλάχιστον πρέπει $f'(x) = 0$, δηλαδή:

$$v_2\,\frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = v_1\,\frac{\lambda-x}{\sqrt{\beta^2+(\lambda-x)^2}}$$

ἤτοι: $v_2\,\frac{(\Gamma\mathrm{O})}{(\mathrm{AO})} = v_1\,\frac{(\Delta\mathrm{O})}{(\mathrm{BO})} \Longrightarrow v_2\,\eta\mu\pi = v_1\,\eta\mu\delta \Longrightarrow \frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta} = \frac{v_1}{v_2} = c.$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 45. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Δείξατε ὅτι αὕτη ἔχει τρία σημεῖα καμπῆς κείμενα ἀπ' εὐθείας.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι: $f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ $\forall x \in R$. Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι:

$$f''(x) = \frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}.$$

Αἱ ρίζαι τῆς $f''(x) = 0$ εἶναι $x_1 = 1$, $x_2 = -2-\sqrt{3}$, $x^3 = -2+\sqrt{3}$.

Καταστρώνομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| x | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{3}$ | | $-2+\sqrt{3}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'' | | — | | + | | — | | + | |
| Συμπερ. | | κοίλη | Σ. Καμ. | κυρτή | Σ. Καμ. | κοίλη | Σ. Καμ. | κυρτή | |

Ὥστε ὑπάρχουν τρία σημεῖα καμπῆς τὰ

$$M_1\left(-2-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right),\quad M_2\left(-2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)),\quad M_3(1,1).$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν $M_1$, $M_2$ εἶναι:

$$\frac{x-(-2-\sqrt{3})}{(-2-\sqrt{3})-(-2+\sqrt{3})} = \frac{y-\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)}$$

ποὺ εὐκόλως ἐπαληθεύεται ὅτι τὸ σημεῖον $M_3(1, 1)$ κεῖται ἐπ' αὐτῆς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 46. Ἐὰν ἡ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἐξίσωσις $\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x = 0$ ἔχῃ θετικὴν ρίζαν ξ, τότε καὶ ἡ ἐξίσωσις $\nu\alpha_0 x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_1 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1} = 0$ ἔχει θετικὴν ρίζαν $\xi_1 < \xi$.**

**Ἀπάντησις.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x$
Αὕτη εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in R$ ἄρα καὶ $\forall x \in [0, \xi]$.
Ἐπὶ πλέον εἶναι $f(0) = f(\xi) = 0$. Ἑπομένως ἔχει ἐφαρμογὴν τὸ θεώρημα τοῦ Rolle.
Ἡ παράγωγος εἶναι:

$$f'(x) = \nu\alpha_0 x^{\nu-1} + (\nu - 1)\alpha_1 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1}$$

καὶ συνεπῶς ὑπάρχει $\xi_1 \in (0, \xi)$ οὕτως ὥστε: $f'(\xi_1) = 0$. Ὥστε ὑπάρχει ρίζα $\xi_1 < \xi$ καὶ θετικὴ τῆς ἐξισώσεως $\nu\alpha_0 x^{\nu-1} + (\nu - 1)\alpha_1 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1} = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 47. Ἐὰν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in R$ εὕρετε τὸ ἐλάχιστον τῆς $f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_\nu)^2$.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι:

$$f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_\nu)$$

Ἡ ἐξίσωσις $f'(x) = 0$ ἔχει μοναδικὴν ρίζαν τὴν $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

Ἐπειδὴ ἡ $f''(x) = 2\nu > 0$ $\forall x \in R$, ἕπεται ὅτι ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$ παρουσιάζει ἐλάχιστον, προφανῶς ἀπόλυτον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 48. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x\eta\mu(\log x)$ καὶ $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$. Εὕρετε τὰ διαστήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ f εἶναι κυρτὴ ἢ κοίλη καὶ τὰ σημεῖα καμπῆς.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $f'(x) = \eta\mu(\log x) + \sigma\upsilon\nu(\log x)$ καὶ $f''(x) = \dfrac{1}{x}[\sigma\upsilon\nu(\log x) - \eta\mu(\log x)] = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} - \log x\right)$.

Ἡ $f''(x) = 0$ ἔχει ρίζας τὰς $x_k = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ μὲ $k \in Z$.

Ἐπειδὴ ἡ $f''$ ἀλλάσσει πρόσημον εἰς τὴν περιοχὴν ἑκάστου τῶν σημείων $x_k$, ἕπεται ὅτι εἰς τὰς θέσεις $x_k$ ἔχομεν σημεῖον καμπῆς.

Ἐπειδὴ $f''(x) > 0 \iff \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} - \log x\right) > 0 \iff \eta\mu\left(\log x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0 \iff$

$\iff 2k\pi - \pi < \log x - \dfrac{\pi}{4} < 2k\pi$ $(k \in Z)$ $2k\pi - \dfrac{3\pi}{4} < \log x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \iff$

$e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ ἕπεται ὅτι ἕκαστον διάστημα τῆς μορφῆς:

$\left(e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}\right)$ (μὲ $k \in Z$) ἡ f εἶναι κυρτή. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $f''(x) < 0$ εἰς ἕκαστον διάστημα τῆς μορφῆς $\left(e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}\right)$ καὶ ἡ f εἰς αὐτὰ εἶναι κοίλη.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 49. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ καὶ $\mathcal{D}(f) = R^+$.**

**α) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὑπάρχει ἐλάχιστον τῆς f**

**β) Νὰ δειχθῇ, ὅτι $f(x) > 0$ $\forall x \in R^+$**

**γ) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $0 < \dfrac{\log x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ διὰ $x > 1$**

**δ) Νὰ δειχθῆ ὅτι: $\frac{\log x}{x} \to 0$ ὅταν $x \to +\infty$**

**ε) Νὰ μελετηθῆ ἡ συνάρτησις $f_1$ μὲ $f_1(x) = \frac{\log x}{x}$ καὶ νὰ γίνη γραφικὴ παράστασις αὐτῆς.**

**Ἀπάντησις. α)** Ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ παντοῦ ὡρισμένη $\forall x \in R^+$. Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}, \ \forall x \in R^+.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι μόνον ἡ $x = 1$.

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι: $f''(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x^2}$ καὶ ἐπειδὴ $f''(1) = \frac{1}{2} > 0$, ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = 1$ παρουσιάζει ἐλάχιστον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $f(1) = 2$. Ἐπειδὴ $f'(x) > 0$ $\forall x > 1$ καὶ $f'(x) < 0$ $\forall x: 0 < x < 1$, ἕπεται ὅτι f γνησίως αὔξουσα ἐν $(1, +\infty)$ καὶ f γνησίως φθίνουσα ἐν $(0, 1)$ καὶ ἑπομένως τὸ εὑρεθὲν ἐλάχιστον εἶναι ἀπόλυτον.

β) Ἀφοῦ $f(x) \geqq 2$ $\forall x \in R^+$, θὰ εἶναι προφανῶς καὶ $f(x) > 0$ $\forall x \in R^+$.

Προφανῶς θὰ ἰσχύη καὶ ἡ ἀνισότης:

$$2\sqrt{x} - \log x \geqq 2 \ \forall x \in R^+.$$

γ) Ἐπειδὴ διὰ $x > 1$ εἶναι $\log x > 0$ θὰ ἔχωμεν ὅτι: $0 < \frac{\log x}{x}$. Ἀλλὰ καὶ $2\sqrt{x} - \log x > 0$ καὶ ἑπομένως: $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in R: x > 1$.

δ) Ἐπειδὴ διὰ $x \to +\infty$ εἶναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{\log x}{x} > 0$, θὰ εἶναι καὶ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$.

ε) Ἡ συνάρτησις $f_1$ εἶναι παντοῦ ὡρισμένη $\forall x \in R^+$ καὶ συνεχὴς καὶ ἔχει παράγωγον:

$$f'_1(x) = \frac{1-\log x}{x^2} \ \forall x \in R^+.$$

Ἐπειδὴ $f'_1(x) = 0 \iff \log x = 1 \iff x = e$, ἕπεται ὅτι διὰ $0 < x < e$ εἶναι $f'_1(x) > 0$ καὶ διὰ $x > e$ εἶναι $f'_1(x) < 0$.

Ἐπὶ πλέον εἶναι: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$ καὶ $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -\infty$ καὶ οἱ ἄξονες εἶναι ἀσύμπτωτοι αὐτῆς.

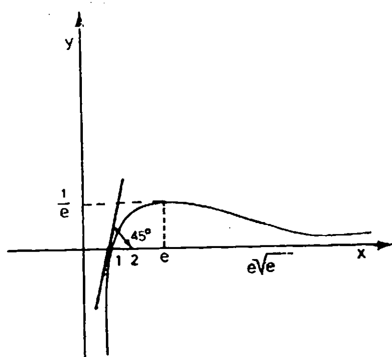
Τομὴ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $x = 1$. Εἰς τοῦτο ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα τῶν x γωνίαν 45°, διότι ἂν ω εἶναι ἡ γωνία τομῆς τῆς ἐφαπτομένης τοῦ διαγράμματος εἰς τὴν θέσιν $x = 1$, θὰ ἔχωμεν:

$$\varepsilon\varphi\omega = f'(1) \iff \varepsilon\varphi\omega = 1 \iff \omega = 45^\circ.$$

Ἐπειδὴ διὰ $0 < x < e$ ἡ f γνησίως αὔξουσα ἐν $(0, e)$ καὶ διὰ $x > e$ ἡ f γνησίως φθίνουσα ἐν $(e, +\infty)$, εἰς τὴν θέσιν $x = e$ ἔχομεν ἕνα ἀπόλυτον μέγιστον τὸ $f(e) = \frac{1}{e}$.

Ἀφ' ἑτέρου ἐπειδὴ $f''(x) = \frac{2\log x - 3}{x^3}$ θὰ εἶναι: διὰ $x > e\sqrt{e}$ ἡ f κυρτή, διὰ $0 < x < e\sqrt{e}$ ἡ f κοίλη καὶ εἰς τὸ σημεῖον $x = e\sqrt{e}$ ἔχομεν σημεῖον καμπῆς.

Ἡ γραφικὴ παράστασις εἶναι ἡ ἀκόλουθος:




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 50. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον:**

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

**α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $x_0 \neq 0$.**

**β) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν τοῦ διαγράμματος τῆς f τῶν διερχομένων διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.**

**γ) Ἐὰν φ τὸ μέτρον μιᾶς ὀξείας γωνίας εἰς μοίρας καὶ τεθῇ $x_1 = 2\text{συν}^2\varphi$, κληθῇ δὲ $f(x_1)$ ἡ τιμὴ τῆς f εἰς τὸ $x_1$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φ ἂν $f(x_1) = 9$.**

**Ἀπάντησις.** α) Ὁ τύπος τῆς f γράφεται:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2} = \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 \text{ μὲ } \mathcal{D}(f) = R - \{0\}.$$

Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι:

$$f'(x) = 2\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)' = 2\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(+\frac{2}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)$$

$\forall x \in \mathcal{D}(f) - \{0\}$.

Κατόπιν τούτου ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $x_0 \neq 0$ τοῦ διαγράμματος τῆς f θὰ εἶναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y - \left(1-\frac{2}{x_0}\right)^2 = \frac{4}{x_0^2}\left(1-\frac{2}{x_0}\right)(x-x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \frac{4}{x_0^2}\left(1-\frac{2}{x_0}\right)x + \left(1-\frac{2}{x_0}\right)\left(1-\frac{6}{x_0}\right) \qquad 1)$$

β) Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν τοῦ διαγράμματος τῆς f, τῶν διερχομένων διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων θὰ εὑρεθοῦν τῇ βοηθείᾳ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (2) $\left(1-\frac{2}{x_0}\right)\left(1-\frac{6}{x_0}\right) = 0$, ἀφοῦ ἡ ἀρχὴ O (0, 0) θὰ πρέπει νὰ εἶναι σημεῖον τῆς (1). Ἐκ τῆς ἐξισώσεως θὰ ἔχωμεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων

ἐπαφῆς. Εὑρίσκομεν $x_0 = 2$ καὶ $x_0 = 6$. Ἐὰν $x_0 = 2$, τότε $y_0 = 0$ καὶ ἐπομένως ὁ ἄξων τῶν x εἶναι μία τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν. Διὰ $x_0 = 6$ εὑρίσκομεν: $y_0 = \frac{4}{36}\left(1-\frac{2}{6}\right) \cdot 6 = \frac{4}{9}$. Ὥστε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς $P_1, P_2$ ἔχουν συντεταγμένας ἀντιστοίχως $P_1(2, 0)$ καὶ $P_2\left(6, \frac{4}{9}\right)$. Τὸ $y_0$ προκύπτει καὶ ἀπὸ τὴν $y = \left(1-\frac{2}{x}\right)^2$.

γ) Ἐπειδὴ $f(x_1)=9=y_1$, ἐκ τῆς $y=\left(1-\frac{2}{x}\right)^2$ λαμβάνομεν $9 = \left(1-\frac{2}{2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\right)^2 =$ $= \varepsilon\varphi^4\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi^2\varphi = 3 \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 51. Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $f(x) = (1-x^2)^\nu$ μὲ $\nu \in N$. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $f^{(\nu)}(x) = 0$ ἔχει *πάσας τὰς ρίζας* ἐν R καὶ εἰς τὸ διάστημα $(-1, 1)$.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ ἐξίσωσις $f(x) = 0$ ἔχει προφανῶς ρίζας τὰς $x_1 = -1$ καὶ $x_2 = +1$ καὶ ἑκάστην πολλαπλότητος ν.

Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι $f'(x) = \nu(1-x^2)^{\nu-1}(-2x)$ καὶ ἡ ἐξίσωσις $f'(x) = 0$ ἔχει ρίζας τὰς $x'_1 = -1$ καὶ $x'_2 = +1$ ἑκάστην πολλαπλότητος $\nu-1$ καὶ ἀκόμη καὶ τὴν ρίζαν $\xi = 0$, ὅπου $-1<0<1$.

Τὸ ὅτι ὑπάρχει ρίζα τῆς f′ εἰς τὸ $(-1, 1)$ δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς (χωρὶς ὅμως νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς τῆς ρίζης).

Πράγματι ἀφοῦ ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in R$ καὶ $f(-1) = f(1) = 0$ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle ὑπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ οὕτως ὥστε $f'(\xi) = 0$.

Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς f′ εἶναι αἱ $-1, \xi, 1$ μὲ $-1<\xi<1$ καὶ μὲ τὰς $-1, 1$ εἰς πολλαπλότητα $\nu-1$. Ἀφοῦ τώρα ἡ f′ εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in R$ καὶ $f'(-1) = f'(1) = f'(\xi) = 0$ ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος καὶ εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων $[-1, \xi]$ καὶ $[\xi, +1]$, ἄρα ὑπάρχει $\xi_1 \in (-1, \xi)$ καὶ $\xi_2 \in (\xi, 1)$ οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύουν: $f''(\xi_1) = 0$ καὶ $f''(\xi_2) = 0$, ἐνῷ ἡ f″ ἔχει τὰς ρίζας $-1, +1$ μὲ πολλαπλότητα $\nu-2$. Συνεπῶς ἡ f″ ἔχει ὡς ρίζας τὰς $-1, \xi_1, \xi_2, 1$ μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος $(\nu-2)$, τὰς $-1, 1$ καὶ τὰς ἄλλας μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος 1, ἤτοι $\nu-2+\nu-2+1+1 = 2\nu-2 =$ μὲ τὸν βαθμὸν τῆς f″.

Διὰ τοῦ ἰδίου συλλογισμοῦ φθάνομεν ἡ $f^{(\nu)}(x)=0$ θὰ ἔχῃ πάσας τὰς ρίζας πραγματικὰς καὶ κειμένας εἰς τὸ διάστημα $(-1, 1)$, ἐνῶ ἡ $f^{(\nu-1)}(x)=0$ θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ρίζας $-1, 1$ μὲ πολλαπλότητα 1 καὶ ὅλας τὰς ἄλλας ρίζας της ποὺ εἶναι $\nu-1$ τὸ πλῆθος. (ἀφοῦ αὐτὴ εἶναι βαθμοῦ $\nu+1$) εἰς τὸ διάστημα $(-1, 1)$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ $f^{(\nu)}(x) = 0$ βαθμοῦ ν ἔχει ὅλας τὰς ρίζας ἐν $(-1, 1)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 52. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ καὶ $\mathcal{D}(f) = [0, 1)$.**

**1) Νὰ μελετηθῇ ἡ f.**

**2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ f ἐπὶ τοῦ $\mathcal{D}(f)$ ἔχει ἀντίστροφον, $f^{-1}$**

**3) Ἐὰν α, $\beta \in R$ μὲ $0 \leq \alpha < 1$ καὶ $0 \leq \beta < 1$ καὶ τεθῇ $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$ δείξατε ὅτι $0 \leq \gamma < 1$ καὶ ὅτι $f(\gamma) = f(\alpha)+f(\beta)$.**

**4) Ἀκολούθως νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε ζεῦγος θετικῶν ἀριθμῶν $\xi_1, \xi_2$ ἰσχύει:**

$$f^{-1}(\xi_1+\xi_2) = \frac{f^{-1}(\xi_1)+f^{-1}(\xi_2)}{1+f^{-1}(\xi_1)f^{-1}(\xi_2)},$$

**Ἀπάντησις.** 1) Ἔχομεν δεδομένον $\mathscr{D}(f) = [0, 1)$ καὶ ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in \mathscr{D}(f)$. Ἡ παράγωγος εἶναι $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ καὶ ἑπομένως $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathscr{D}(f)$.

Ἐπειδὴ $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = +\infty$ ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

| x | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|
| f' | 1 | + | $+\infty$ |
| f | 0 | ↗ | $+\infty$ |

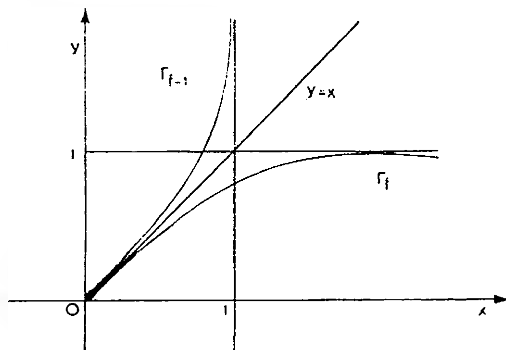
Εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὴν ἀρχὴν συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην διχοτόμον.

Ἀκόμη εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν ὅτι εἰς τὸ $\mathscr{D}(f)$ τὸ διάγραμμα τῆς f κεῖται κάτω τῆς ἐφαπτομένης.

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $f(x) > x$ $\forall x \in \mathscr{D}(f)$. Πράγματι ἂν $\varphi(x) = f(x) - x$ τότε $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$ καὶ $\varphi'(0) = 0$ καὶ $\varphi'(x) > 0$ $\forall x \in \mathscr{D}(f)$.

Εἶναι συνεπῶς ἡ φ γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ $\mathscr{D}(f)$ καὶ ἐπειδὴ $\varphi(0) = 0$ καὶ $\lim\limits_{x \to 1-0} \varphi(x) = +\infty$ θὰ εἶναι: $f(x) - x > 0$ $\forall x \in \mathscr{D}(f) - \{0\}$, ἤτοι $f(x) > x$.

Τὸ διάγραμμα τῆς f εἶναι τὸ τοῦ κάτωθι σχήματος.




2) Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι μονότονος καὶ γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ $\mathscr{D}(f)$, μὲ τιμὰς ἐν $[0, +\infty)$, ἔπεται ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς $f^{-1}$ καὶ εἶναι γνησίως μονότονος καὶ αὔξουσα εἰς τὸ $[0, +\infty)$ καὶ μὲ τιμὰς ἐν $[0, 1)$. Αὕτη εἶναι συμμετρικὴ τῆς f ὡς πρὸς τὴν πρώτην διχοτόμον.

Ἐὰν τεθῇ $f(x) = y$, τότε $x = f^{-1}(y)$ καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \iff \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \text{ καὶ } x = f^{-1}(y) = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

Καὶ δι' ἐναλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \text{ μὲ } \mathscr{D}(f^{-1}) = [0, +\infty) \text{ καὶ } R(f^{-1}) = [0, 1).$$

3) Ἐπειδὴ $0 \leq \alpha < 1$ καὶ $0 \leq \beta < 1$ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$0 \leq \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} < 1$$

τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα.

Ἔχομεν $f(\alpha)+f(\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) =$
$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\gamma}{1-\gamma} = f(\gamma).$

4) Ἐὰν $(\xi_1, \xi_2)$ ἕνα ζεῦγος θετικῶν ἀριθμῶν, ἐπειδὴ ἡ f εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς $[0, 1)$ καὶ γνησίως αὔξουσα ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς ἀριθμὸς $\alpha \in [0, 1)$ καὶ ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς ἀριθμὸς $\beta \in [0, 1)$ οὕτως ὥστε $f(\alpha) = \xi_1$ καὶ $f(\beta) = \xi_2$ καὶ δυνάμει τοῦ (3) θὰ ἔχωμεν:

$$\xi_1+\xi_2 = f(\alpha)+f(\beta) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$$

Ἐπειδὴ ἡ f εἰς τὸ $[0, 1)$ ἔχει ἀντίστροφον τὴν $f^{-1}$ θὰ ἔχωμεν: $\alpha = f^{-1}(\xi_1)$ καὶ $\beta = f^{-1}(\xi_2)$ καὶ $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} = f^{-1}(\xi_1+\xi_2)$.

Συνεπῶς:

$$f^{-1}(\xi_1+\xi_2) = \frac{f^{-1}(\xi_1)+f^{-1}(\xi_2)}{1+f^{-1}(\xi_1)f^{-1}(\xi_2)}.$$

Τὴν σχέσιν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἀπὸ τὸν τύπον:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

διὰ $x = \xi_1+\xi_2$, $x = \xi_1$, $x = \xi_2$ ἐκτελοῦντες τὰς σχετικὰς πράξεις.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 53. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f συνεχῆ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει $f(x+x')+f(x-x') = 2f(x)f(x')$ (1) διὰ κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x, x'.**

**α) Εὕρετε ὅλας τὰς σταθερὰς συναρτήσεις f αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὴν (1).**

**β) Εὕρετε ἐκ τοῦ τύπου τῆς (1) ἕνα παράδειγμα μὴ σταθερᾶς συναρτήσεως ἡ ὁποία νὰ πληρῇ τὴν (1).**

**γ) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ f εἶναι ἀρτία καὶ ὅτι $f(0) = 1$.**

**δ) Ἐὰν ἡ $f(x) = 0$ ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς καὶ α ἡ μικροτέρα θετικὴ ρίζα αὐτῆς, δείξατε ὅτι τὸ διάγραμμα $\Gamma_f$ τῆς f ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον M(α, 0).**

**ε) Δείξατε ὅτι ἡ f ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις αὐτὰς εἶναι περιοδική, καὶ**

**στ) Ἐὰν ἡ f ἔχῃ πρώτην παράγωγον, θὰ ἔχωμεν:**

$$f'(x) = -f'(\alpha)f(x+\alpha)$$

**καὶ ὅτι κατόπιν τούτου ἔχει διαδοχικὰς παραγώγους πάσης τάξεως.**

**Ἀπάντησις.** α) Ἔστω k ἡ σταθερὰ τιμὴ τῆς f $\forall x \in R$, τότε θὰ ἔχωμεν: $k+k = 2k^2$, ἐξ ἧς $k = 0$, $k = 1$. Αἱ ζητούμεναι λοιπὸν συναρτήσεις εἶναι αἱ $f(x) = 0$ καὶ $f(x) = 1$.

β) Ἐπειδὴ ἡ f ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ συν(α+β) + συν(α − β) = 2συνασυνβ $\forall\alpha$, $\forall\beta \in R$, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις f(x) = συνx μὴ σταθερὰ πληροῖ τὴν συνθήκην (1).

γ) Ἐπειδὴ ἡ (1) εἶναι ἰσχυρὰ $\forall x$, $\forall x' \in R$ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ $x' = 0$ καὶ $\forall x \in R$, ἤτοι:

$$2f(x) = 2f(x)f(0) \;\; \forall x \in R \iff 2f(x)\,[f(0)-1] = 0$$

καὶ ἡ f δὲν εἶναι μηδενικὴ $\forall x \in R$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει $x_0 \in R$ οὕτως ὥστε $f(x_0) \neq 0$. Ἐπομένως $f(0) = 1$. (Δεχόμεθα δηλαδὴ ὅτι δὲν εἶναι δι' ὅλα τὰ x, $f(x) = 0$ ἢ καὶ $f(x) = 1$).

Κατόπιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (1) διὰ $x = 0$ καὶ $\forall x' \in R$ δίδει : $f(x')+f(-x') = 2f(x')f(0) \Rightarrow f(-x') = f(x')$ καὶ ἡ f ἀρτία.

δ) Ἐπειδὴ $\alpha \neq 0$ καὶ ρίζα τῆς $f(x) = 0$, θὰ εἶναι $f(\alpha) = 0$.

Ἐκ τῆς (1) διὰ $x = \alpha$ λαμβάνομεν :

$$f(\alpha+x')+f(\alpha-x') = 2f(\alpha)f(x) \quad \forall x' \in R$$

καὶ ἐπειδὴ $f(\alpha) = 0$ θὰ εἶναι : $f(\alpha+x') = -f(\alpha-x')$ ,ἤτοι τὸ σημεῖον $M(\alpha, 0)$ εἶναι κέντρον συμμετρίας τῆς f. Πράγματι τὰ σημεῖα $(\alpha+x', f(\alpha+x')]$ καὶ $[\alpha-x', f(\alpha-x')]$ ἔχουν τετμημένην τοῦ μέσου αὐτῶν τὴν $\frac{\alpha+x+\alpha-x'}{2} = \alpha$ καὶ τεταγμένην τὴν $\frac{f(\alpha+x')+f(\alpha-x')}{2} = \frac{-f(\alpha-x')+f(\alpha-x')}{2} = 0$.

ε) Ἐπειδὴ $f(x+\alpha)+f(x-\alpha) = 2f(x)f(\alpha) = 0$ καὶ ἐκ ταύτης ὅτι : $f(x+2\alpha)+f(x) = 0$ καὶ ὅτι : $f(x+3\alpha)+f(x+\alpha) = 0$ καὶ ὅτι : $f(x+4\alpha)+f(x+2\alpha) = 0$, ἕπεται $f(x+4\alpha) = -f(x+2\alpha) = f(x)$ $\forall x \in R$ καὶ ἡ f εἶναι περιοδική, περιόδου 4α.

στ) Ἀφοῦ ἡ f ἔχει πρώτην παράγωγον ἔστω εἰς τὸ $x_0 \in R$ θὰ ἔχωμεν :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)+f(2\alpha-x_0)}{\varepsilon}$$

διότι $f(2\alpha-x_0) = -f(x_0)$ καὶ ἐπομένως $f'(x_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{2f\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right) f\left(x_0-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$

(διότι $f(k)++f(\lambda) = 2f\left(\frac{k+\lambda}{2}\right) f\left(\frac{k-\lambda}{2}\right)$ ἂν $x+x' = k$ καὶ $x-x' = \lambda$).

Ὥστε $f'(x_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\varepsilon}{2}}$ , $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f\left(x_0-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ διότι $f(\alpha) = 0$ καὶ ἐπειδὴ ἡ f ὡς παραγωγίσιμος εἶναι συνεχὴς θὰ ἔχωμεν :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f\left(x_0-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right) = f(x_0-\alpha)$$

Ἐπομένως : $f'(x_0) = f'(\alpha) \cdot f(x_0-\alpha)$

Ἤτοι $f'(x) = f'(\alpha)f(x-\alpha)$ $\forall x \in R$

Ἀλλὰ $f(x-\alpha) = f(\alpha-x) = -f(x+\alpha)$ καὶ τελικῶς

$$f'(x) = -f'(\alpha)f(x+\alpha) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι παραγωγίσιμος $\forall x \in R$ καὶ ἡ $f(x+\alpha)$ ἔχει παράγωγον τὴν $f'(x+\alpha)$ καὶ δυνάμει τῆς σχέσεως (2) θὰ ἔχωμεν :

$$f'(x+\alpha) = -f'(\alpha)f(x+2\alpha)$$

Ὥστε $f''(x) = -f'(\alpha).f'(x+\alpha) = [-f'(\alpha)]^2 f(x+2\alpha)$ καὶ μὲ μαθηματικὴν ἐπαγωγὴν

$$f^{(\nu)}(x) = [-f'(\alpha)]^\nu f(x+\nu\alpha).$$

Ἐπὶ πλέον ἰσχύει καὶ τὸ ἀκόλουθον :

Ἐὰν $f'(\alpha) = c$, ἐπειδὴ $f(x+2\alpha) = -f(x)$ θὰ ἔχωμεν: $f''(x) = c^2.f(x+2\alpha) = -c^2f(x)$, ἤτοι:

$$f''(x)+c^2f(x) = 0.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 54. Ἀποδείξατε ὅτι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x)$ βαθμοῦ $\nu \in N$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τῆς παραγώγου του ὅταν, καὶ μόνον ὅταν εἶναι τῆς μορφῆς $c(x-\rho)^\nu$. (Συντελεσταὶ ἐν R καὶ $\rho \in R$).**

**Ἀπόδειξις.** Προφανῶς, ἐὰν $\pi(x) = \alpha_0(x-\rho)^\nu$, θὰ ἔχωμεν $\pi'(x) = \alpha_0\nu(x-\rho)^{\nu-1}$ καὶ ἄρα τὸ $\pi'(x)$ διαιρεῖ τὸ $\pi(x)$.

Ἔστω τώρα ὅτι εἶναι: $\pi(x) = \alpha_0x^\nu+\alpha_1x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu-1}x+\alpha_\nu$ μὲ $\alpha_0 \neq 0$. Ἡ παράγωγος εἶναι: $\pi'(x) = \alpha_0\nu x^{\nu-1}+\alpha_1(\nu-1)x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_{\nu-1}$ καὶ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ ν-1.

Ἐὰν τὸ $\pi'(x)$ διαιρῇ τὸ $\pi(x)$, τότε τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\pi(x):\pi'(x)$ θὰ εἶναι πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\frac{1}{\nu}x+k (k \in R)$.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$(1) \qquad \pi(x) \equiv \pi'(x)\left[\frac{1}{\nu}x+k\right] \equiv \frac{1}{\nu}\pi'(x)(x-\rho) \text{ ὅπου ἐτέθη χάριν ἁπλότητος } k = -\frac{\rho}{\nu}.$$

Ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν διὰ παραγωγίσεως τῶν μελῶν της:

$$\pi'(x) \equiv \frac{1}{\nu}\pi''(x)(x-\rho)+\frac{1}{\nu}\pi'(x)\cdot 1$$

ἤτοι:

$$\pi'(x) - \frac{1}{\nu}\pi'(x) \equiv \frac{1}{\nu}\pi''(x)(x-\rho)$$

$$\Longleftrightarrow \pi'(x)\left(1-\frac{1}{\nu}\right) \equiv \frac{1}{\nu}\pi''(x)(x-\rho)$$

$$\Longleftrightarrow (\nu-1)\pi'(x) \equiv \pi''(x)(x-\rho)$$

Κατόπιν τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι ἰσχύει:

$$(\nu-\lambda)\pi^{(\lambda)}(x) \equiv \pi^{(\lambda+1)}(x)(x-\rho) \qquad (2)$$
$$\forall \lambda \in N : \lambda \leqq \nu.$$

Πράγματι ἂν ἰσχύῃ ἡ (2) καὶ παραγωγίσωμεν τὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$(\nu-\lambda)\pi^{(\lambda+1)}(x) \equiv \pi^{(\lambda+2)}(x)(x-\rho)+\pi^{(\lambda+1)}(x)\cdot 1$$

$$\Longleftrightarrow (\nu-\lambda-1)\pi^{(\lambda+1)}(x) \equiv \pi^{(\lambda+2)}(x)(x-\rho)$$

Ἤτοι ἰσχύει $\forall \lambda \in N : \lambda \leqq \nu$.

Ἐκ τῆς (2) τώρα λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$\nu\pi(x) = \pi'(x)(x-\rho)$$
$$(\nu-1)\pi'(x) = \pi''(x)(x-\rho)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[\nu-(\nu-1)]\pi^{(\nu-1)}(x) = \pi^{(\nu)}(x)\cdot(x-\rho)$$

Ἐνῷ $\pi^{(\nu)}(x)$ εἶναι μία σταθερά, ἀφοῦ τὸ $\pi(x)$ εἶναι βαθμοῦ ν.

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἄνω σχέσεις κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu\pi(x) = c_1(x-\rho)^\nu$$

ἤτοι:

$$\pi(x) = \frac{c_1}{\nu!}(x-\rho)^\nu = c(x-\rho)^\nu.$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει καὶ τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα. Ἐὰν ἡ παράγωγος ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου διαιρεῖ τὸ πολυώνυμον, τότε καὶ ἡ κάθε τάξεως παράγωγος αὐτοῦ διαιρεῖ τὴν ἀμέσως προηγουμένην παράγωγον αὐτοῦ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 55. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μέ:**

$$f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{ἄν } x \leq 3 \\ 2x^2 & \text{ἄν } x > 3 \end{cases}$$

**Ποῖα τὰ ἀκρότατα αὐτῆς;**

**Ἀπάντησις.** Ἐὰν $x<3$ ἔχομεν $f'(x) = -1$ καὶ ἂν $x>3$ ἔχομεν $f'(x) = 4x$, ἐνῶ διὰ $x = 3$ δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς f.

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x<3$ εἶναι $f'(x) = -1<0$, ἐνῶ διὰ $x>3$ εἶναι $f'(x)>0$, ἤτοι εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου 3 ἡ f′ ἀλλάσσει πρόσημον καὶ ἡ f εἶναι φθίνουσα διὰ $x<3$ καὶ αὔξουσα διὰ $x>3$, ἐνῶ διὰ $x = 3$ εἶναι $f(3) = 2$ καὶ συνεπῶς τὸ ἐλάχιστον αὐτῆς εἶναι τὸ 2 (ὁλικόν).

Δώσατε γραφικὴν παράστασιν.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 56. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$. Νὰ ἐξετασθῇ εἰς ποῖα διαστήματα εἶναι μονότονος.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $\mathscr{D}(f) = R$ καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι: $f'(x) = 5(x-2)^4 (2x+1)^4 + 8(x-2)^5(2x+1)^3 = (x-2)^4(2x+1)^3[5(2x+1)^2+8(x-2)(2x+1)]$, $\forall x \in \mathscr{D}(f)$. Ἐπειδὴ οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ καὶ ὁ τρίτος εἶναι $(2x+1)(18x-11)$, θὰ ἔχωμεν:

$f'(x)>0 \ \forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{18}, +\infty\right) - \{2\}$ καὶ $f'(x)<0 \ \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right)$, ἐνῶ διὰ $x = -\frac{1}{2}, \frac{11}{18}, 2$ ἡ $f'(x) = 0$.

Κατόπιν τούτου ἡ f γνησίως αὔξουσα $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ καθὼς καὶ $\forall x \in \left(\frac{11}{18}, 2\right) \cup (2, +\infty)$ καὶ f γνησίως φθίνουσα $\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right)$. Ἐπειδὴ διὰ $x \to \frac{-1}{2} - 0$ εἶναι $f'(x)>0$ καὶ διὰ $x \to -\frac{1}{2} + 0$ εἶναι $f'(x)<0$ ἕπεται ὅτι εἰς τὴν θέσιν $x = -\frac{1}{2}$ ἡ f παρουσιάζει τοπικὸν μέγιστον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ διὰ $x \to \frac{11}{18} - 0$ εἶναι $f'(x)<0$ καὶ διὰ $x \to \frac{11}{18} + 0$ εἶναι $f'(x)>0$ ἕπεται ὅτι ἡ f εἰς τὴν θέσιν $x = \frac{11}{18}$ παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $f\left(\frac{11}{18}\right) = -\frac{2^3 \cdot 5^{14}}{3^{13}}$.

Τέλος, διὰ $x \to 2-0$ εἶναι $f'(x)>0$ καὶ διὰ $x \to 2+0$ εἶναι $f'(x)>0$, δηλαδὴ ἡ f′ δὲν ἀλλάσσει πρόσημον, δὲν ἔχομεν ἐδῶ ἀκρότατον. Χρειαζόμεθα τὴν δευτέραν παράγωγον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 57. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ τῶν ἀκολουθιῶν:**

**α)** $\alpha_\nu = \frac{\log\nu}{\nu} \ \Big| \ \nu \in N$ **β)** $\alpha_\nu = \nu \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \ \Big| \ \nu \in N$

γ) $\alpha_\nu = \left(\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}{2}\right)^\nu$ | $\nu \in N$, $\alpha, \beta \in R^+$     δ) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu}$ | $\nu \in N$,

**μὲ τὴν βοήθεια τῶν κανόνων τοῦ de l' Hospital.**

**Ἀπάντησις.** α) Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ὁριακῆς τιμῆς τῆς $\alpha_\nu \mid \nu \in N$ μελετῶμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ διὰ $x \to +\infty$.

Ἐπειδὴ εἶναι $\mathfrak{D}(f) = R^+$ καὶ πληροῦνται ὅλαι αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τοῦ de l' Hospital $\left(\text{εἶναι τοῦ τύπου } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$ θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ ἄρα } f(x) \to 0$$

ὅταν $x \to +\infty$.

Ἑπομένως διὰ κάθε ἀκολουθίαν $x_\nu \mid \nu \in N$ ἀπὸ τὸ $R^+$ μὲ $x_\nu \to +\infty$ ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu) \to 0$ τοῦ $\nu \to +\infty$. Ἐὰν ὡς ἀκολουθίαν λάβωμεν τὴν $x_\nu = \nu$ μὲ $\nu \to +\infty$ θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$f(x_\nu) = f(\nu) = \frac{\log \nu}{\nu} \to 0 \text{ ἂν } \nu \to +\infty. \text{ Ὥστε } \alpha_\nu \to 0.$$

β) Ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω:

Πρὸς τοῦτο θεωρῶμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ καὶ μὲ $\mathfrak{D}(f) = R^+$. Θὰ ἔχωμεν: 

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \left(\text{Εἶναι τὸ τοῦ τύπου } \frac{0}{0}\right)$$

Ἑπομένως καὶ $\alpha_\nu \to 1$.

γ) Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt[x]{\alpha}+\sqrt[x]{\beta}}{2}\right)^x$ καὶ μὲ $\mathfrak{D}(f) = R^+$.

$$\text{Ἔχομεν } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[x]{\alpha}+\sqrt[x]{\beta}}{2}\right)^x.$$

Ἐπειδή, ἂν τεθῇ $\dfrac{1}{x} = y$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $y \to 0+0$ ἂν $x \to +\infty$, τὸ ἀνωτέρω ὅριον γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to0+0} \frac{(\alpha^y+\beta^y)^{\frac{1}{y}}}{2^{\frac{1}{y}}} = \lim_{y\to0+0} e^{\frac{1}{y}\log\frac{\alpha^y+\beta^y}{2}} = e^{\lim\limits_{y\to0+0}\frac{1}{y}\log\frac{\alpha^y+\beta^y}{2}}$$

$$\text{Ἀλλὰ } \lim_{y\to0+0} \frac{\log\frac{\alpha^y+\beta^y}{2}}{y} = \lim_{y\to0+0} \frac{\left(\log\frac{\alpha^y+\beta^y}{2}\right)'}{(y)'} = \lim_{y\to0+0} \frac{\frac{2}{\alpha^y+\beta^y}\left(\frac{\alpha^y+\beta^y}{2}\right)'}{1} \text{ καὶ}$$

ἐπειδὴ $\left(\frac{\alpha^y}{2}+\frac{\beta^y}{2}\right)'=\left(\frac{\alpha^y}{2}\right)'+\left(\frac{\beta^y}{2}\right)'=\frac{1}{2}\,\alpha^y\log\alpha+\frac{1}{2}\,\beta^y\log\beta$, θὰ ἔχωμεν τελικῶς:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^{\frac{1}{2}\log\alpha+\frac{1}{2}\log\beta}=e^{\frac{1}{2}\log(\alpha\beta)}=e^{\log\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{\alpha\beta}.$$

Ἑπομένως καὶ $\alpha_\nu\to\sqrt{\alpha\beta}$.

δ) Ἂν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x)=\sqrt[x]{x}$ μὲ $\mathscr{D}(f)=R^+$.

Θὰ ἔχωμεν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log x}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}}=e^0=1$, ἄρα $\alpha_\nu\to 1$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 58. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ μὲ ἀντιστοίχους παραγώγους $f'_1$ καὶ $f'_2$ διὰ κάθε $x\in\mathscr{D}=\mathscr{D}(f_1)\cap\mathscr{D}(f_2)$. Ἐὰν $\forall x\in\mathscr{D}$ ἰσχύουν:**

**α) $f'_1(x)=f_2(x)$ β) $f'_2(x)=-f_1(x)$ γ) $f_1(0)=0,\ f_2(0)=1$**

**Νὰ δειχθῇ ὅτι:**

**1) $f_1^2(x)+f_2^2(x)=1\quad \forall x\in\mathscr{D}$**

**2) Ἐὰν $F_1$ καὶ $F_2$ καὶ ἕνα ἄλλο ζεῦγος συναρτήσεων μὲ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας καὶ πεδίον ὁρισμοῦ, θὰ εἶναι: $F_1(x)\equiv f_1(x)$ καὶ $F_2(x)\equiv f_2(x)\ \forall x\in\mathscr{D}$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω $\varphi_1(x)=f_1^2(x)$ καὶ $\varphi_2(x)=-f_2^2(x)$ καὶ $\forall x\in\mathscr{D}$ ὑπάρχουν ἐξ ὑποθέσεως αἱ παράγωγοι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$.

Θὰ ἔχωμεν: $\varphi'_1(x)=2f_1(x)f_1'(x)$ καὶ $\varphi'_2(x)=-2f_2(x)f'_2(x)$. καὶ ἐπειδὴ $f_2(x)=f'_1(x)$ καὶ $f'_2(x)=-f_1(x)$ θὰ ἔχωμεν: $\varphi'_1(x)=2f_1(x).f_2(x)$ καὶ $\varphi'_2(x)=2f_2(x).f_1(x)$, ἤτοι $\forall x\in\mathscr{D}$ ἰσχύει: $\varphi'_1(x)=\varphi'_2(x)$ καὶ ἑπομένως αἱ ἀντίστοιχοι συναρτήσεις θὰ διαφέρουν κατὰ σταθεράν, ἤτοι: $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=c$, ὁπότε: $f_1^2(x)+f_2^2(x)=c$. Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχει τὸ $f_1(0)$ καὶ $f_2(0)$ καὶ εἶναι $f_1(0)=0,\ f_2(0)=1$.

Κατόπιν τούτου, ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται, διὰ $x=0$, $f_1^2(0)+f_2^2(0)=c\Rightarrow$ $\Rightarrow c=1$, ὁπότε: $f_1^2(x)+f_2^2(x)=1\ \forall x\in\mathscr{D}$.

Ἔστω τώρα καὶ τὸ ζεῦγος τῶν συναρτήσεων $F_1$ καὶ $F_2$ μὲ $\mathscr{D}(F_1)\cup\mathscr{D}(F_2)=\mathscr{D}$.

Διὰ τὰς συναρτήσεις αὐτὰς ἰσχύουν ἐξ ὑποθέσεως:

$$F'_1(x)=F_2(x),\ F'_2(x)=-F_1(x) \text{ καὶ } F_1(0)=0,\ F_2(0)=1$$

καὶ ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ: $F_1^2(x)+F_2^2(x)=1\ \forall x\in\mathscr{D}$

Ἐπειδὴ θέλομεν νὰ δείξωμεν, ὅτι: $F_1(x)\equiv f_1(x)$ καὶ $F_2(x)\equiv f_2(x)\ \forall x\in\mathscr{D}$ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ συναρτήσεις $\sigma_1(x)=F_1(x)-f_1(x)$ καὶ $\sigma_2(x)=F_2(x)-f_2(x)$ λαμβάνουν $\forall x\in\mathscr{D}$ σταθερὰν τιμὴν 0. Προφανῶς: $\sigma_1(0)=F_1(0)-f_1(0)=0$ καὶ $\sigma_2(0)=F_2(0)-f_2(0)=$ $=1-1=0$. Ἐπὶ πλέον ἰσχύουν:

$$\sigma'_1(x)=F'_1(x)-f'_1(x)=F_2(x)-f_2(x)=\sigma_2(x) \text{ καὶ } \sigma'_2(x)=F'_2(x)-f'_2(x)=$$
$$=-F_1(x)+f_1(x)=-\sigma_1(x)$$

Ἑπομένως διὰ τὰς συναρτήσεις: $\sigma_1(x)$ καὶ $\sigma_2(x)$ θὰ ἰσχύῃ: $\sigma_1^2(x)+\sigma_2^2(x)=c$ καὶ διὰ $x=0$ $\sigma_1^2(0)+\sigma_2^2(0)=c\Rightarrow c=0$ καὶ ἄρα: $\sigma_1^2(x)+\sigma_2^2(x)=0\ \forall x\in\mathscr{D}$. Τοῦτο σημαίνει:

$$\sigma_1(x)\equiv 0 \quad\text{καὶ}\quad \sigma_2(x)\equiv 0,\ \forall x\in\mathscr{D}.$$

Ὥστε: $F_1(x)\equiv f_1(x)$ καὶ $F_2(x)\equiv f_2(x)\ \forall x\in\mathscr{D}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 59. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $e^x-\pi_\nu(x)=0$, ὅπου $\pi_\nu(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ ν ἔχει τὸ πολὺ ν+1 πραγματικὰς λύσεις.**

**Ἀπάντησις.** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $e^x - \pi_0(x) = 0$ (ὅπου $\pi_0(x) \equiv c$ μία σταθερά, $\nu = 0$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει τὸ πολὺ μίαν πραγματικήν. Πράγματι ἂν εἶχε δύο πραγματικὰς ρίζας, τότε ἡ παράγωγος τῆς $e^x - c$ θὰ εἶχε τουλάχιστον μίαν ρίζαν πραγματικήν. Ἡ παράγωγος ὅμως εἶναι $e^x$ καὶ ἡ ἐξίσωσις $e^x = 0$ οὐδεμίαν λύσιν δέχεται.

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $e^x - \pi_1(x) = 0$, ὅπου $\pi_1(x) = \alpha x + \beta$ (πρώτου βαθμοῦ) ἔχει τὸ πολὺ δύο ρίζας πραγματικάς, διότι ἂν εἶχε τρεῖς ρίζας πραγματικὰς ἡ παράγωγος τῆς $e^x - \pi_1(x)$ θὰ εἶχε τουλάχιστον 2 ρίζας πραγματικάς. Ἡ παράγωγος ὅμως αὐτῆς εἶναι $e^x - \alpha$ καὶ ὅπως εἴδωμεν αὐτὴ ἔχει τὸ πολὺ μίαν ρίζαν πραγματικήν. Ἄρα ἡ $e^x - \pi_1(x) = 0$ ἔχει τὸ πολὺ δύο ρίζας ἐν R.

Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ $e^x - \pi_{\nu-1}(x) = 0$ ἔχει τὸ πολὺ ν ρίζας πραγματικάς, τότε ἡ $e^x - \pi_\nu(x) = 0$ θὰ ἔχῃ τὸ πολὺ ν+1 ρίζας πραγματικάς. Πράγματι ἂν αὕτη εἶχε ν+2 ρίζας ἐν R, τότε ἡ παράγωγος τῆς $e^x - \pi_\nu(x)$, ἡ ὁποία εἶναι $e^x - \pi'_\nu(x)$, δηλαδὴ τῆς μορφῆς $e^x - \pi_{\nu-1}(x)$ θὰ εἶχε τουλάχιστον ν+1 ρίζας ἐν R, ἐνῷ ἔχει τὸ πολὺ ν ρίζας ἐν R, ἄτοπον, ἄρα ἡ $e^x - \pi_\nu(x) = 0$ ἔχει τὸ πολὺ ν+1 ρίζας ἐν R.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 60. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:**

α) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ β) $f(x) = \frac{3x}{2}\log\left(e - \frac{1}{3x}\right)$

γ) $f(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$ δ) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + x$

**Ἀπάντησις.** α) Γνωρίζομεν, ὅτι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$. Κατόπιν τούτου θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x\, e^{\frac{1}{x}} = +\infty \text{ (ὡς προκύπτει εὐκόλως ἂν τεθῇ } \frac{1}{x} = \omega).$$

Ἑπομένως ὑπάρχει ἡ κατακόρυφος ἀσύμπτωτος $x = 0$.

Διὰ τὰς πλαγίους ἀσυμπτώτους ἔχομεν νὰ προσδιορίσωμεν τά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ καὶ } \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x) = \beta$$

καὶ ἐφ' ὅσον αὐτὰ ὑπάρχουν ἡ εὐθεῖα $y = \alpha x + \beta$ εἶναι πλαγία ἀσύμπτωτος.

Ἔχομεν: $\alpha = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

Ἐπίσης ἔχομεν: $\beta = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$ (διότι ὡς γνωστὸν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^\omega - 1}{\omega} = 1$ μὲ $\omega = \frac{1}{x}\Big)$.

Ὥστε ἡ εὐθεῖα $y = x+1$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος.

Ἐὰν $x \to 0-0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0-0} x\, e^{\frac{1}{x}} = 0$.

β) Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν, ὅτι πρέπει $e - \frac{1}{3x} > 0 \iff x(3ex - 1) > 0 \iff$ $x < 0$ ἢ $x > \frac{1}{3e}$.

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς $\forall x \in \mathscr{D}(f)$, ὅπου $\mathscr{D}(f)=(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3e}, +\infty\right)$

Ἐὰν λοιπὸν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι θὰ ὑπάρχουν εἰς τὰ πεπερασμένα φράγματα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, ἤτοι διὰ $x \to 0-0$ καὶ διὰ $x \to \frac{1}{3e}+0$.

Ἔχομεν $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \frac{3x}{2} \log\left(e - \frac{1}{3x}\right) = 0$ (διότι ἂν $\omega = -\frac{1}{3x}$ καὶ $x \to$ $\to 0-0 \Rightarrow \omega \to +\infty$ καὶ συνεπῶς $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{3x}{2}\left(e - \frac{1}{3x}\right) = -\frac{1}{2} \lim\limits_{\omega\to+\infty} \log \frac{e+\omega}{\omega} = 0$

Κατόπιν αὐτοῦ ἡ εὐθεῖα $x = 0$ δὲν εἶναι κατακόρυφος ἀσύμπτωτος.

Ἐπίσης $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3e}+0} f(x) = \frac{3}{2} \lim x \log\left(e - \frac{1}{3x}\right) = -\infty$, πού σημαίνει, ὅτι εὐθεῖα $x = \frac{1}{3e}$ εἶναι μία κατακόρυφος ἀσύμπτωτος.

Διὰ τὰς πλαγίας ἀσυμπτώτους ἔχομεν:

$$\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \log\left(e - \frac{1}{3x}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\beta = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-\alpha x) = \frac{3}{2} \lim_{x\to\pm\infty} x \left[\log\left(e - \frac{1}{3x}\right) - 1\right] = \frac{3}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{3xe}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$= \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3e}\right) = -\frac{1}{2e}$, ὁπότε ἡ εὐθεῖα $y = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2e}$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος.

γ) Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$, ἔπεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι.

Θὰ ἐξετάσωμεν ἂν ὑπάρχουν πλάγιαι ἀσύμπτωτοι ,δηλαδὴ ἂν ὑπάρχουν διὰ $x \to +\infty$ ἢ $x \to -\infty$, τὰ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \alpha x) = \beta$ καθὼς καὶ τὰ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$ $= \alpha'$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha' x) = \beta'$.

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2}{1} = 3 = \alpha$

καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x] = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$ καὶ ἑπομένως μία πλαγία ἀσύμπτωτος εἶναι ἡ εὐθεῖα $y = 3x$.

Ἐπίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2\right) = 1 = \alpha'$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x^2}+x) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0$ (ἀφοῦ $\sqrt{1+x^2} > 0$ καὶ $-x>0$).

Ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα $y = x$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος.

δ) Εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι οὔτε ὁριζόντιοι. Ἂς ἐξετάσωμεν ἂν ὑπάρχουν πλάγιοι τοιαῦται.

Εὑρίσκομεν τὸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-\alpha x) = \beta$.

Ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\,\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 = \alpha$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 = \beta$ καὶ ἡ $y = x$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος.

Ἐπίσης ἔχομεν: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \alpha'$ καὶ $\lim[f(x)-\alpha' x) = \beta' = 0$. Ὥστε ὑπάρχει μία μόνον ἀσύμπτωτος πλαγία ἡ $y = x$ (ἀμφίπλευρα).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 61. Εἰς ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων (Ox, Oy) θεωροῦμεν τὰ διαγράμματα ($\Gamma_1$) καὶ ($\Gamma_2$) τῶν συναρτήσεων $f_1$ μὲ $y = f_1(x)$ καὶ $f_2$ μὲ $f_2(x) = = z = \frac{x^2}{f_1(x)}$. Ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Oy ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὸ σημεῖον H τοῦ Ox μὲ τετμημένην $x \neq 0$ τέμνει τὸ ($\Gamma_1$) εἰς τὸ $M_1$ καὶ τὸ ($\Gamma_2$) εἰς τὸ $M_2$. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ $M_1$ καὶ $M_2$ τῶν ($\Gamma_1$) καὶ ($\Gamma_2$) ἀντιστοίχως τέμνουν τὸν Ox εἰς τὰ σημεῖα $T_1$ καὶ $T_2$ ἀντιστοίχως.**

**Ἀποδείξατε ὅτι ἰσχύει $\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}$.**

**Ἀκολούθως δείξατε ὅτι:**

$$\frac{1}{(\overrightarrow{HT_1})} + \frac{1}{(\overrightarrow{HT_2})} = \frac{2}{(\overrightarrow{HO})},$$

**ἀφοῦ πρῶτον γνωρίζοντες τὸ $M_1$ κατασκευάσετε τὸ $M_2$.**

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν προφανῶς $x^2 = yz$ καὶ παραγωγίζοντες ὡς πρὸς x λαμβάνομεν: $2x = y'z+z'y$ καὶ διαιροῦντες διὰ yz λαμβάνομεν: $\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}$.

(Ὑποθέτομεν βεβαίως ὅτι διὰ τὴν θεωρηθεῖσαν τιμὴν τοῦ $x \neq 0$ ἡ $f_1(x)$ δὲν μηδενίζεται οὔτε ἀπειρίζεται).

Παρατηροῦμεν τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν $yz = x^2$, ὅτι ὅταν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τοῦ $M_1$ ἐπὶ τῆς HP ἡ θέσις τοῦ $M_2$ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς γεωμετρικῶς:

Ἐπειδὴ $yz = x^2 \Longleftrightarrow (\overrightarrow{HM_1})(\overrightarrow{HM_2}) = (\overrightarrow{HO})^2$ ἕπεται ὅτι τὸ $M_2$ εἶναι ἡ τομὴ τῆς HP καὶ τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ $M_1$ καὶ ἐφαπτομένου τοῦ Ox εἰς τὸ O.

Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐὰν $M'_2$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $M_2$ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox θὰ ἔχωμεν: $(\overrightarrow{HM_1})(\overrightarrow{HM'_2}) = -(\overrightarrow{HO})^2$, ἤτοι τὸ $M'_2$ ὁρίζεται ὡς ἡ τομὴ τῆς HP καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν $OM_1$ εἰς τὸ O.

Γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῶν διαγραμμάτων $(\Gamma_1)$ καὶ $(\Gamma_2)$ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα $M_1$, $M_2$ εἶναι:

$$\begin{array}{l|l} Y - y = y'(X - x) & M_1(x, y) \\ Y - z = z'(X - x) & M_2(x, z) \end{array}$$

Ἐὰν $Y = 0$ εὑρίσκομεν δι' ἑκάστην τούτων τὰς τετμημένας τῶν σημείων $T_1$ καὶ $T_2$ ἀντιστοίχως (ὑποτίθεται $y'z' \neq 0$).

Θὰ ἔχωμεν: $(\overrightarrow{OT_1}) = \dfrac{xy' - y}{y'} = X_1$ [δηλαδὴ $T_1(X_1, 0)$] καὶ $(\overrightarrow{OT_2}) = \dfrac{xz' - z}{z'} = X_2$ [δηλαδὴ $T_2(X_2, 0)$].

Κατόπιν τούτου θὰ ἔχωμεν:

$$(\overrightarrow{HT_1}) = (\overrightarrow{OT_1}) - (\overrightarrow{OH}) = \frac{xy' - y}{y'} - x = -\frac{y}{y'} \text{ καὶ } (\overrightarrow{HT_2}) = \frac{xz' - z}{z'} - x = -\frac{z}{z'}.$$

$$\text{Ἑπομένως } \frac{1}{(\overrightarrow{HT_1})} + \frac{1}{(\overrightarrow{HT_2})} = -\left(\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z}\right) = -\frac{2}{x} = -\frac{2}{(\overrightarrow{OH})} \text{ καὶ ἄρα:}$$

$$\frac{1}{(\overrightarrow{HT_1})} + \frac{1}{(\overrightarrow{HT_2})} = \frac{2}{(\overrightarrow{HO})}.$$

## 12.39 Ἀνισότης τοῦ Jensen

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. **Μία συνάρτησις f ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς ἕνα διάστημα [α, β] εἶναι κυρτὴ εἰς αὐτό, τότε $\forall \xi_1$, $\forall \xi_2$ εἰς τὸ [α, β] ἰσχύει.**

$$f\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) \leq \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2)}{2}.$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ $\xi_1 \in [\alpha, \beta]$ καὶ $\xi_2 \in [\alpha, \beta]$ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τοῦ Taylor εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $\dfrac{\xi_1 + \xi_2}{2}\left(\xi_1 < \dfrac{\xi_1 + \xi_2}{2} < \xi_2\right)$ καὶ ἔχομεν:

$$f(\xi_1) = f\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) + \left(\xi_1 - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) f'\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right)^2 f''(\xi) \text{ μὲ } \xi_1 < \xi < \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \qquad (1)$$

καὶ $$f(\xi_2)=f\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)+\left(\xi_2-\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)f'\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\xi_2-\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)^2 f''(\theta) \text{ μὲ } \frac{\xi_1+\xi_2}{2}<\theta<\xi_2 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}=f\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)+\frac{1}{16}(\xi_2-\xi_1)^2\,[f''(\xi)+f''(\theta)] \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι κυρτὴ θὰ εἶναι $f''(\xi)\geqq 0$ καὶ $f''(\theta)\geqq 0$ καὶ ἑπομένως:

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)}{2}\geqq f\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right) (\text{μὲ } \alpha\leqq\xi_1,\ \xi_2\leqq\beta).$$

Ἐπειδὴ ἂν f κυρτὴ ἡ —f εἶναι κοίλη θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{f(\xi_1)+(\xi_2)}{2}\leqq f\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1** **Ἔστω $f(x)=x^k$ / $k\geqq 1$ καὶ $x\geqq 0$. Δείξατε ὅτι:**

$$\frac{\alpha^k+\beta^k}{2}\geqq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^k.$$

**Ἀπάντησις.** Ἐπειδὴ $f'(x)=kx^{k-1}$ καὶ $f''(x)=k(k-1)x^{k-2}$ θὰ εἶναι $f''(x)\geqq 0$, ἕπεται ὅτι ἡ f εἶναι κυρτὴ διὰ $k\geqq 1$ καὶ $x\geqq 0$.

Ἑπομένως θὰ ἰσχύη:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\geqq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ μὲ } \alpha,\beta\in R_0^+$$

ἤτοι: $$\frac{\alpha^k+\beta^k}{2}\geqq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^k \text{ μὲ } k\geqq 1.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἔστω $f(x)=\eta\mu x$ μὲ $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Δείξατε ὅτι:**

$$\frac{\eta\mu\,\alpha+\eta\mu\,\beta}{2}\leqq\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ καὶ $f''(x)=-\eta\mu x\leqq 0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ἑπομένως ἡ $f(x)=\eta\mu x$ εἶναι κοίλη εἰς τὸ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ καὶ ἄρα:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\leqq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ μὲ } \alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \text{ ἤτοι: } \frac{\eta\mu\,\alpha+\eta\mu\,\beta}{2}\leqq\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ἐὰν $f(x)=\log x$ μὲ $x>0$. Δείξατε ὅτι: $\frac{\alpha+\beta}{2}\leqq\sqrt{\alpha\beta}$.**

**Ἀπάντησις.** Εἶναι: $f'(x)=\frac{1}{x}$ καὶ $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ μὲ $x>0$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις $f(x)=\log x$ εἶναι κοίλη εἰς τὸ $(0,+\infty)$

Κατόπιν τούτου: $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leqq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, ἤτοι: $\frac{\log\alpha+\log\beta}{2} \leqq \log\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\log(\alpha\beta) \leqq \log\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Longleftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} \geqq \sqrt{\alpha\beta}.$$

Ἡ σχέσις γενικεύεται μὲ μαθητικὴν ἐπαγωγὴν διὰ ἀριθμοὺς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in R^+$ καὶ εἶναι:

$$\log\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu} \geqq \frac{\log\alpha_1+\log\alpha_2+\ldots+\log\alpha_\nu}{\nu}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu} \geqq \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu},$$ ἤτοι ἡ γνωστὴ ἀνισότης Cauchy.

# Γ

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ
## ΚΥΚΛΟΣ ΠΡΩΤΟΣ
## ΚΥΚΛΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

### Κύκλος πρῶτος.

**1.** Εὕρετε τὰς παραγώγους τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων καθορίζοντες συνάμα καὶ τὰ πεῖδα ὁρισμοῦ των:

α) $f(x) = x\log(x+1)$

β) $f(x) = e^x \log x$

γ) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

δ) $f(x) = x\log(\sigma\upsilon\nu x)$

ε) $f(x) = x + \dfrac{\log x}{x}$

στ) $f(x) = \dfrac{\alpha + x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \Big| \alpha \in R$

**2.** Ὁμοίως:

α) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^\nu} \Big| \nu \in N$

β) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$

γ) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}$

δ) $f(x) = \eta\mu(\nu x)\sigma\upsilon\nu^\nu x \,|\, \nu \in N$

ε) $f(x) = \dfrac{x + \varepsilon\varphi x}{x^2}$

στ) $f(x) = \eta\mu^3(2x+1)$

**3.** Ὁμοίως:

α) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

β) $f(x) = x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2(x^3)$

γ) $f(x) = \dfrac{\varepsilon\varphi(x+1)}{\sigma\varphi(x+1)}$

δ) $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{1 + \eta\mu x}$

ε) $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + \dfrac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$

**4.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων μὲ τύπους:

α) $f(x) = x^5(x+2)^3$

β) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+3)^3}$

στ) $f(x) = \dfrac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$

ζ) $f(x) = \log\sigma\upsilon\nu(\alpha x + \beta) \,|\, \alpha, \beta \in R$

γ) $f(x) = \eta\mu x + \log x$

η) $f(x) = \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$

δ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x^2+1}}$

θ) $f(x) = (\eta\mu x)^x$

ε) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

ι) $f(x) = \tau o\xi_0\eta\mu \dfrac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} \mid \alpha\in R$

**5.** Ὁμοίως:

α) $f(x) = (x^2+1)^{x^3}$

β) $f(x) = (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

γ) $f(x) = x^x$

δ) $f(x) = (\log x)^{\log x}$

ε) $f(x) = x^\nu \log x^\nu \mid \nu\in N$

στ) $f(x) = xe^{-x}$

**6.** Ὁμοίως:

α) $f(x) = \alpha^x\beta^x(\alpha, \beta > 0)$

β) $f(x) = x\log x - x$

γ) $f(x) = (\log x)^{-1}$

δ) $f(x) = \log[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)]$

**7.** Ἀποδείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x) = \nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^\nu + 1$ μὲ $\nu\in N$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^2$.

**8.** Ἐὰν $f(x) = \log \dfrac{1}{1+x}$ δείξατε ὅτι ἰσχύει $xf'(x)+1 = e^{f(x)}$

**9.** Ἐὰν παράγωγος τῆς συναρτήσεως f εἶναι δεδομένη εὕρετε τὰς παραγώγους τῶν συναρτήσεων: $F(x) = f(x^2)$ καὶ $F_1(x) = f[f(x)]$.

**10.** Εὕρετε τὰς παραγώγους τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{(x+1)^\nu}{(x-1)^{\nu'}} \mid \nu, \nu'\in N$

β) $f(x) = \dfrac{1}{3}\eta\mu x\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \dfrac{5}{4\sigma\upsilon\nu^3 x}\right) + \dfrac{2}{5}\varepsilon\varphi^2 x$

γ) $f(x) = e^{e^x}\cdot e^x$

δ) $f(x) = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\nu e^x \mid \alpha, \beta, \gamma\in R, \nu\in N$

**11.** Δείξατε ὅτι:

$$f'(x) = \tau\varepsilon\mu^6 x$$

ἂν $f(x) = \dfrac{1}{5}\eta\mu x\left(\sigma\upsilon\nu^{-5}x + \dfrac{4}{3}\sigma\upsilon\nu^{-3}x\right) + \dfrac{8}{15}\varepsilon\varphi x$

**12.** Ἐὰν $f(x) = \log\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}$, τότε $f'(x) = \sigma\tau\varepsilon\mu x$.

**13.** Ἐὰν $f(x) = (\log x)^{e^x}$, τότε $f'(e) = e^{e-1}$.

**14.** Ἐὰν $f(x) = x^2\log x$, τότε $2f(x)+x^2 = xf'(x)$.

**15.** Ἐὰν $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, τότε:

$$f'(x) = (-1)^\nu \frac{\nu!}{x^{\nu+1}}\left[\log x - \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)\right]$$

**16.** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι 4ης τάξεως τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^x\log x$

β) $f(x) = x^2e^x$

γ) $f(x) = x^3e^x$

δ) $f(x) = x\log x$

**17.** Δίδεται τὸ πολυώνυμον $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ μὲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἂν $f(0) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(2) = 2$ καὶ $f'''(3) = 3$.

**18.** Ἐὰν $f(x) = f'(x)$ $\forall x \in R$ ποία ἡ $f$.

**19.** Ἐὰν $f_1(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ καὶ $f_2(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ δείξατε ὅτι ἑκατέρα τούτων ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον τῆς ἑτέρας.

**20.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f$ ὁριζομένην ὡς ἀκολούθως:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{ἂν } x \leq 1 \\ kx + \lambda & \text{ἂν } x > 1 \end{cases}$$

Ποῖαι αἱ συνθῆκαι διὰ τὰ $k, \lambda \in R$ ἵνα ὑπάρχῃ ἡ $f'(1)$.

**21.** Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f$ μὲ $\mathcal{D}(f) = R^+$ πληρῇ τὴν σχέσιν $f(x^3) = x^3$ $\forall x \in R^+$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $f'(1)$.

**22.** Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f$ εἶναι ὡρισμένη καὶ παραγωγίσιμος $\forall x \in R^+$ καὶ ἰσχύῃ $f(x^2) = x^7$, δείξατε ὅτι $f'(4) = 112$.

**23.** Ἐὰν $f(x) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}.\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha)$ μὲ $\alpha \in R$ δείξατε ὅτι: $f^{(\nu)}(x) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha + \nu\alpha)$ μὲ $\nu \in N$.

**24.** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

$$\Sigma_1 = \eta\mu x + 2\eta\mu 2x + \ldots + \nu\eta\mu\nu x$$

$$\Sigma_2 = \sigma\upsilon\nu x + 3\sigma\upsilon\nu 3x + \ldots + (2\nu - 1)\sigma\upsilon\nu(2\nu - 1)x$$

(Ἀναχωρήσατε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα: $\Sigma = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x + \ldots + \sigma\upsilon\nu(\nu x)$).

**25.** Εὕρετε τὰς παραγώγους τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ β) $f(x) = \eta\mu^\nu(\alpha x)\sigma\upsilon\nu^\mu(\beta x) \mid \alpha, \beta \in R$ $\mu, \nu \in N$

γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$ δ) $f(x) = \eta\mu\sqrt{x}$

ε) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x)$ στ) $f(x) = \eta\mu(\eta\mu x^x)$

ζ) $f(x) = \tau o\xi_0\varepsilon\varphi \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ η) $f(x) = \tau o\xi_0\sigma\upsilon\nu(k\varepsilon\varphi x) \mid k \in R$

θ) $f(x) = \tau o\xi_0\eta\mu \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

**26.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f$ μὲ $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + e^x \mid \alpha, \beta \in R$.
Δείξατε, ὅτι: $e^x = f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)$

**27.** Ἀποδείξατε ὅτι ἐὰν $f(x) = e^x\sigma\upsilon\nu x$ θὰ ἔχωμεν: $f^{(4\nu)}(x) = (-2)^\nu f(x)$. Ποῖαι αἱ παράγωγοι τάξεως $4\nu + 1$, $4\nu + 2$, $4\nu + 3 \mid \nu \in N$, ἐν σχέσει πρὸς τὰς παραγώγους $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$;

**28.** Ἐὰν $f(x) = e^x$, δείξατε ὅτι τὸ $\theta$ τοῦ τύπου $f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon f'(x + \theta\varepsilon)$ μὲ $0 < \theta < 1$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ $x$.

**29.** Δείξατε ὅτι: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 1$.

**30.** Ἐὰν $x > 0$, τότε $e^x > 1 + x > e^{\frac{x}{x+1}}$

**31.** Ἐὰν $f(x) = \frac{e^x}{x^\nu}$ μὲ $0 < x$ καὶ $\nu > 0$ (σταθ.) δείξατε ὅτι $f_{min} = \frac{e^\nu}{\nu^\nu}$.

**32.** Ἐὰν $f(x) = \frac{2\alpha}{x}\sqrt{2\alpha x - x^2}$ μὲ $\alpha \in R^+$ καὶ $0 < x < \alpha$ ($\alpha$ σταθερὰ) δείξατε ὅτι ἡ $f$ ἔχει μοναδικὸν σημεῖον καμπῆς τὸ $M\left(\frac{3\alpha}{2}, \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}\right)$.

**33.** Ἐὰν $x > 0$ δείξατε ὅτι: $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$.

Ἀκολούθως δείξατε ὅτι: $\Gamma_\nu \to \sqrt{e}$ ὅταν $\nu \to +\infty$ καὶ ὅπου:

$$\Gamma_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu^2}\right)\left(1 + \frac{2}{\nu^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{\nu}{\nu^2}\right).$$

**34.** Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(x-2)e^x + x + 2 = 0$ οὐδεμίαν θετικὴν ρίζαν δέχεται.

**35.** Ἐὰν $f_1(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta\eta\mu x$, $f_2(x) = \alpha\eta\mu x - \beta\eta\mu\ \alpha$, $\beta \in R$, δείξατε ὅτι ἡ παράστασις

$$P = f^{(\mu)}(x).f_2^{(\nu)}(x) - f_1^{(\mu)}(x)f_2^{(\nu)}(x)$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ $x$.

**36.** Ἔστω $F(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[1 + \frac{f(x)-f(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}\left(f(\alpha) - \frac{1}{2}f'(\alpha)\right)\right]$.

Δείξατε ὅτι: $F'(\alpha) = 1$ καὶ $F''(\alpha) = 2$.

**37.** Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $e^x\eta\mu x = 1$. Ἐὰν $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζαι αὐτῆς δείξατε ὅτι ὑπάρχει $\xi$ μὲ $\rho_1 < \xi < \rho_2$ οὕτως ὥστε $\sigma\upsilon\nu\xi = -e^{-\xi}$.

**38.** Δείξατε ὅτι μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μεγίστων (ἀντιστ. ἐλαχίστων) μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως ὑπάρχει ἕνα ἐλάχιστον (ἀντ. ἕνα μέγιστον).

**39.** Ἀπὸ τὸν τύπον $\alpha\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu x\eta\mu^2 x$ εὕρετε τὸν τύπον $\eta\mu 3x = 3\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x - \eta\mu^3 x$ (διὰ παραγωγίσεως).

**40.** Ἐὰν $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{\alpha}}$ δείξατε ὅτι:

$$f^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^{\nu-2}} \quad (\nu \geq 2)\ \nu \in N.$$

**41.** Ἐὰν $f(x) = x^{\nu-1}e^{\frac{1}{x}}$ τότε $f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu \frac{f(x)}{x^{2\nu}}\ \Big|\ \nu \in N$.

**42.** Δείξατε ὅτι:

$$\tau o\xi_0\,\eta\mu\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x & \text{ἂν } x \geq 1 \\ 2\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x & \text{ἂν } -1 \leq x \leq 1 \\ -\pi - 2\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x & \text{ἂν } x \leq -1 \end{cases}$$

**43.** Ἐὰν $\alpha < \beta$ δείξατε ὅτι: $\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\beta - \tau o\xi_0\varepsilon\varphi\alpha < \beta - \alpha$.

**44.** Ὑπολογίσατε τὰς ἀκολούθους ὁριακὰς τιμὰς μὲ τὸν κανόνα τοῦ de l' Hospital:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{2\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x^2 - \pi}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\nu}\log x \ (\nu>0)$

6) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\eta\mu x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\eta\mu\, x}$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2+2x+\eta\mu\, 2x}{2x+\eta\mu 2x)\, e^{\eta\mu x}}$

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\varepsilon\varphi x)^{\sigma\varphi x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} (\sigma\upsilon\nu\mu x)^{\frac{\nu}{x^2}}$ $\Big|$ $\mu,\ \nu\in R$

11) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\log(e^x-1)}}$

12) $\lim(\log\sigma\varphi x)^{\varepsilon\varphi x}$

**45.** Καθορίσατε τὰ διαστήματα μονοτονίας τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x$

ε) $f(x) = \sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi}{x}$

β) $f(x) = x^2e^{-x}$

στ) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

γ) $f(x) = e^x + 3x$

ζ) $f(x) = \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x$

δ) $f(x) = \log|x|$

**46.** Δείξατε ὅτι : $x - \dfrac{x^3}{3} < \tau o\xi_0\varepsilon\varphi x < x - \dfrac{x^3}{6}$ $\Big|$ $0 < x < 1.$

**47.** Εὕρετε τὰ ἀκρότατα τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

β) $f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2$

γ) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

δ) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

ε) $f(x) = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x$

στ) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{ἂν } x<0 \\ 3x+5 & \text{ἂν } x\geqq 0 \end{cases}$

ζ) $f(x) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

η) $f(x) = \sqrt{e^{x'}-1}$

**48.** Εὕρετε τὰ διαστήματα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ κάτωθι συναρτήσεις εἶναι κυρταὶ ἢ κοῖλαι. Ποῖα τὰ σημεῖα καμπῆς.

α) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$

β) $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\log^2 x}{x}$ $(x>0)$

δ) $f(x) = x\eta\mu(\log x)$ $x>0$

ε) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

**49.** Τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων ὡρίσατε τὰς ἀσυμπτώτους :

α) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$ β) $f(x) = x + \dfrac{\eta\mu x}{x}$ γ) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

**50.** Νὰ μελετηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι συναρτήσεις :

α) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$

β) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

δ) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

## Κύκλος δεύτερος

**51.** Ἐὰν $x>0$ δείξατε ὅτι: $\log(1+x)<\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$.

**52.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f_1$ μέ: $f_1(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{g(x)} & \text{ἐὰν } 0<|x|<2\pi \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} & \text{ἂν } x=0\end{cases}$

ὅπου $f(x)=2-2\text{συν}x-x\text{ημ}x$ καὶ $g(x)=x^2-\text{ημ}^2x$, δείξατε ὅτι $f_1(x)>0$ διὰ $-2\pi<x<2\pi$

**53.** Ἐὰν $x, y\in(0,1)$ δείξατε ὅτι: $y\log\frac{y}{x}+(1-y)\log\frac{1-y}{1-x}\geqq 2(y-x)^2$.

**54.** Ἐὰν $x>0$ καὶ $x\neq 1$ δείξατε: $0<\frac{x\log x}{x^2-1}\leqq\frac{1}{2}$.

**55.** Εὕρετε διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $x\in R^+$ εἶναι: $\sqrt{x}\geqq\log x$.

**56.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f$ μὲ $f(x+y)=\frac{f(x)+f(x)}{1-f(x)f(y)}$ $\forall x, \forall y\in R$ μὲ $f(x)f(y)\neq 1$.
Ἐὰν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ δείξατε ὅτι θὰ ἰσχύῃ: $f'(x)=1+f^2(x)$.

**57.** Εὕρετε τὴν παράγωγον τῆς $f$ μὲ $f(x)=[x]$.

**58.** Εὕρετε μὲ τὸν κανόνα τοῦ de l'Hospital τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν ἀκολουθιῶν:

α) $\alpha_\nu=\nu^2\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\nu \mid \nu\in N$ β) $\alpha_\nu=\left(1+\frac{\alpha}{\nu}+\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right)^\nu \mid \alpha\in R^+, \nu\in N$

γ) $\alpha_\nu=\nu^2\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}-\alpha^{\frac{1}{\nu+1}}\right) \mid \alpha\in R^+, \nu\in N$ δ) $\alpha_\nu=\left(1+\frac{\nu-2}{\nu^2+3}\right)^{\frac{\nu^2-1}{\nu^2+1}} \mid \nu\in N$.

ε) $\alpha_\nu=\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}+\beta^{\frac{1}{\nu}}}{2}\right)^\nu \mid \alpha, \beta\in R^+, \nu\in N$ στ) $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\log\nu} \mid \nu\in N$

**59.** Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $f(x)=x(x^4-2x^2+1)$. Εὕρετε διὰ τῆς μελέτης τῆς σχετικῆς συναρτήσεως τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ριζῶν της.

**60.** Εὕρετε τὴν παράγωγον τῶν $f_1, f_2$ μὲ $f_1(x)=|\text{εφ}x|$ καὶ $f_2(x)=\text{εφ}|x|$.

**61.** Ἐὰν $\alpha, \beta\in R$ καὶ $f(x)=x^\nu+\alpha x+\beta \mid \nu\in N$ δείξατε ὅτι ἂν ν ἄρτιος δὲν δύναται νὰ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τῶν $x\in R$ περισσοτέρας τῶν δύο καὶ ἂν ν περιττὸς διὰ τιμὰς τοῦ $x\in R$ περισσοτέρας τῶν τριῶν.

**62.** Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\in R$ καὶ ὁμοίως $c_1, c_2, \ldots, c_\nu\in R$ δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις:

$$c_1^2(\alpha_1-x)+c_2^2(\alpha_2-x)+\ldots+c_\nu^2(\alpha_\nu-x)=x+x^3+\ldots+x^{2\nu+1}$$

δύναται νὰ ἔχῃ ρίζαν πραγματικὴν μίαν, καὶ μόνον μίαν.

**63.** Εὕρετε τὰς ἀκολούθους ὁριακὰς τιμάς:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\log 2x)^\nu}{x^k} \mid \nu\in N, k\in R^+$ β) $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\text{ημ}\frac{\nu\pi}{2\nu+1}\right)^{\nu^2} \mid \nu\in N$

**64.** Δείξατε ὅτι: $\log(1+x)>\frac{x}{1+x}$ ἂν $x>-1$.

**65.** Δείξατε ὅτι ὑπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$, $\alpha$, $\beta\in R^+$ οὕτως ὥστε: $\alpha<\left(\frac{1}{c}\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}<\beta$

[Θεωρήσατε τὴν $f(x) = x\log x$]

**66.** Δείξατε ὅτι διὰ $x\in R^+_0$ ἰσχύει: $2x+\frac{3}{8}\geq\sqrt[4]{x}$

**67.** Ὁμοίως διὰ $x>0$ δείξατε ὅτι: $x>\frac{3\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$

**68.** Ἐὰν $\alpha>0$ $\beta>0$ $\alpha+\beta=1$ δείξατε ὅτι: $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^\nu+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^\nu\geq\frac{5^\nu}{2^{\nu-1}}$ $\nu\in N$

[Θεωρήσατε τὴν συνάρτησιν $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^\nu$ μὲ $0<x<1$ ἡ ὁποία εἶναι κυρτὴ καὶ ἐφαρμόσατε τὴν ἀνισότητα Jensen).

**69.** Ἐὰν $x>0$ δείξατε:

α) $(1+x)^{1+x}>e^x$ β) $\frac{2}{2x+1}<\log\left(\frac{x+1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

**70.** Ἐὰν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$ αἱ πραγματικαὶ καὶ διακεκριμέναι ρίζαι τοῦ πολυωνύμου $\pi(x)$ μὲ πολλαπλότητας ἀντιστοίχως $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu\in N$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\pi''(x)\pi(x)=[\pi'(x)]^2$ οὐδεμίαν δέχεται πραγματικὴν λύσιν.

**71.** Εὕρετε τὸν ἀριθμὸν τῶν πραγματικῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου:

$$f(x)=\nu x^\nu-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-\ldots-1.$$

**72.** Ἀποδείξατε ὅτι πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^\nu+\left(\frac{\nu}{1}\right)^2x^{\nu-1}+\left(\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot2}\right)^2x^{\nu-2}+$ $+\ldots+1=0$ εἶναι πραγματικαί.

**73.** Ἐὰν πᾶσαι αἱ ρίζαι τῶν πολυωνύμων $\pi(x)-\alpha$ καὶ $\pi(x)-\beta$ εἶναι πραγματικαί, τότε ἂν $\alpha<\lambda<\beta$ καὶ πᾶσαι αἱ ρίζαι τοῦ $\pi(x)-\lambda$ εἶναι ἐπίσης πραγματικαί.

**74.** Ἐὰν διὰ τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x)$ ἰσχύῃ $\pi(x_1)=\pi''(x_1)$, ἀλλὰ $\pi'(x_1)\neq0$ δείξατε ὅτι:

$$\sum_{i=2}^{\nu}\frac{1}{x_1-x_i}=0.$$

**75.** Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $f_1, f_2$ ὡρισμένες καὶ παραγωγίσιμες στὸ διάστημα $[0,2]$ καὶ ὅτι: $2f_1^2(x)-f_2^3(x)+9=0$ $\forall x\in[0,2]$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $f_2(1)$, $f'_2(1)$ ἐὰν $f_1(1)=3$ καὶ $f'_1(1)=-2$.

**76.** Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x)=e^x$ εἶναι κυρτὴ καὶ βάσει αὐτοῦ ὅτι:

$$e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}<\frac{1}{2}\left(e^\alpha+e^\beta\right)$$

**77.** Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $f(x)=-\log(\log x)$ καὶ ὅτι:

$$\log\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq\sqrt{\log\alpha\log\beta},\ \alpha,\beta>1.$$

**78.** Ἐὰν $f(x+y)=f(x)f(y)$ $\forall x,y\in R$ καὶ $f(x)=1+x\sigma(x)$, ὅπου $\lim\limits_{x\to0}\sigma(x)=1$, δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἡ $f'(x)$ $\forall x\in R$.

**79.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f μὲ $\mathcal{D}(f) = R$ διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ σχέσις $f(x+y) = f(x)f(y)$ $x, \forall y \in R$ δείξατε ὅτι: $f'(x)f(y) = f'(y)f(x)$ $\forall x, y \in R$.

**80.** Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x) = |x-\alpha|^3 + |x-\beta|^3$, $\alpha, \beta, x \in R$ μὲ $\beta > \alpha$ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἔχει τοπικὸ ἐλάχιστο.

**81.** Δείξατε ὅτι: $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} > \dfrac{\alpha}{\beta}$ $\left(0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**82.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f(x) μὲ $\mathcal{D}(f) = (\alpha, \beta)$ διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει $f''(x) > 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Δείξατε ὅτι: $f(k_1x_1+k_2x_2)k_1f(x_1)+k_2f(x_2)$, ὅπου $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ καὶ $k_1, k_2 \in R^+$ μὲ $k_1+k_2=1$.

Τί γίνεται ὅταν $f''(x)<0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$;

**83.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f μὲ $\mathcal{D}(f) = R^+$ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει:

$$f(xy) = f(x)+f(x) \ \forall x, y \in R \text{ καὶ } f'(1) = 1.$$

Δείξατε ὅτι: i) $\dfrac{f'(y)}{y} = \dfrac{f'(x)}{x}$ $\forall x, y \in R^+$, ii) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\forall x \in R^+$

**84.** Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις: $f(x) = (\tau o\xi_0 \eta\mu x)^2$ μὲ $x \in [-1, 1]$ πληροῖ τὴν σχέσιν: $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$.

**84α.** Δίδεται ἡ συνάρτησις: $f(x) = \dfrac{\alpha_1}{x-k_1} + \dfrac{\alpha_2}{x-k_2} + \dfrac{\alpha_3}{x-k_3}$, ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^+$ καὶ $k_1<k_2<k_3$.

Δείξατε ὅτι ἡ f μηδενίζεται διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ τῶν $k_1, k_2$ καὶ μίαν τιμὴν μεταξὺ τῶν $k_2, k_3$.

**85.** Δείξατε ὅτι: $\log x + \log y \leqq \log\left(\dfrac{x^k}{k} + \dfrac{y^\lambda}{\lambda}\right)$ $\forall x, y \in R^+$ καὶ $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{\lambda} = 1$ μὲ $k, \lambda > 1$.

**86.** Ὁμοίως ὅτι: $\alpha^\alpha\beta^\beta \geqq \dfrac{1}{2}$ $\forall \alpha, \beta \in R^+$ μὲ $\alpha+\beta = 1$.

**87.** Ἐὰν $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in R$ καὶ ἰσχύει $\dfrac{\alpha_0}{1} + \dfrac{\alpha_1}{2} + \ldots + \dfrac{\alpha_\nu}{\nu+1} = 0$ δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_\nu x^\nu$ ἔχει μίαν τουλάχιστον πραγματικὴν ρίζαν.

**88.** Ἔστω ἡ συνάρτησις $f_k(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^k$, $k \in Z$

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sqrt{1+x^2} > |x|$ $\forall x \in R$

ii) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\mathcal{D}(f_k)$

iii) Εἶναι $f_{-k}(x) = f_k(-x)$

iv) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_k(x)}{x^k}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^k f(x)$

v) Δείξατε ὅτι: $f'_k(x) = \dfrac{kf_k(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

**89.** Ἐὰν τὸ $f(x) = x^3+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3$ μὲ $\alpha_3 \neq 0$ ἔχει διπλῆ ρίζα τὸν ἀριθμὸν $\lambda \in R$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha_1\lambda^2+2\alpha_2\lambda+3\alpha_3 = 0$.

**90.** Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, $x \geqq 0$, $0 < \alpha < 1$

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς f.

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι : $1-\alpha \geq x^{\alpha}-\alpha x \ \forall x \geq \alpha$

3) Εἶναι $x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \leq \alpha x_1+\beta x_2$, ὅπου $x_1, x_2 \in R^+$ καὶ $\beta = 1-\alpha$.

**91.** Δείξατε ὅτι $|\alpha|^k + |\beta|^k \geq |\alpha+\beta|^k$, $0 \leq k \leq 1$.

**92.** Δείξατε ὅτι : $\left(\frac{\lambda+1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} > \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mu}$, $\mu, \lambda \in R^+$, $\mu \neq \lambda$

**93.** Νὰ δειχθῇ ὅτι : $\alpha^{\beta}+\beta^{\alpha}>1$, $\alpha, \beta \in R^+$

**94.** Ἐὰν διὰ τὴν συνάρτησιν f ἰσχύει : $|f(x)-f(y)| \leq (x-y)^2 \ \forall x, y \in R$, τότε ἡ f εἶναι μία σταθερά.

**95.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f(x) μὲ $\mathfrak{D}(f) = R$ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει :

$$f(x+\alpha) = f(x) f(\alpha) \ \forall x, \alpha \in R$$

καὶ ὅτι ὑπάρχει τὸ $f'(0)$.
Δείξατε ὅτι ἡ f παραγωγίζεται $\forall x \in R$ καὶ ἰσχύει : $f'(x) = f(x)f'(0)$.

**96.** Ἐὰν $A, B, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma \in R$ μὲ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι, ἵνα ἡ συνάρτησις $f(x) = Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}+\Gamma e^{\gamma x}$ νὰ ἰσοῦται μὲ μηδὲν $\forall x \in R$.

**97.** Ἔστω τὸ πολυώνυμον $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$
Ἐὰν $|f(x)| \leq 1 \ \forall x \in [-1, 1]$ δείξατε ὅτι : $-4 \leq 2\alpha x+\beta \leq 4 \ \forall x \in [-1, 1]$.
Γενικεύσατε τὴν πρότασιν.

**98.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f μὲ $\mathfrak{D}(f) = R$ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει :

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \ \forall x, y \in R$$

Δείξατε ὅτι : $f''(x)f(y) = f(x)f''(y) \ \forall x, y \in R$.

**99.** Ἔστω μία συνάρτησις f διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύουν :

1) $\exists$ ἡ $f'(x) \ \forall x \in R$

2) $f(x+y) = e^x f(y)+e^y f(x) \ \forall x, y \in R$ 3) $f'(0) = 2$

Δείξατε ὅτι :

i) $f(\nu x) = \nu e^{(\nu-1)x} f(x) \ \forall \nu \in N, \ \forall x \in R$ ii) $f(0) = 0$

iii) Ποῖον τὸ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ iv) $f'(x) = f(x)+2e^x$

**100.** Ἐὰν $0<x \leq y< \frac{\pi}{2}$, τότε $\frac{y-x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \leq \varepsilon\varphi y-\varepsilon\varphi x \leq \frac{y-x}{\sigma\upsilon\nu^2 y}$.

**101.** Ἐὰν $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ δείξατε τὴν ἀνισότητα τοῦ Jordan $\frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$.

**102.** Ἐὰν $x>0$, τότε $\eta\mu x \geq x-\frac{x^3}{6}$.

**103.** Ἐὰν $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ δείξατε ὅτι : $\tau o\xi_0 \eta\mu \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}-x$.

**104.** Ἐὰν $-1<x<+\infty$ δείξατε ὅτι : $\tau o\xi_0 \varepsilon\varphi x+\tau o\xi_0 \varepsilon\varphi \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$.

**105.** Δίδεται ἡ συνάρτησις f μέ:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \text{συν}\dfrac{1}{x} & \text{ἄν } x \neq 0 \\ 0 & \text{ἄν } x = 0 \end{cases}$$

Ὑπάρχει ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς f εἰς τὴν θέσιν $x = 0$;

**106.** Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ διαγράμματος τῆς f μὲ $f(x) = \text{συν}^2(\sqrt{x})$ εἰς τὸ σημεῖον $x = 0$, εἶναι ἡ $x+y = 1$.

**107.** Νὰ γίνη μελέτη τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$ β) $f(x) = \dfrac{\text{ημ}2x}{1+\text{ημ}x}$

γ) $f(x) = \dfrac{\text{συν}2x+1}{2\text{συν}x-1}$ δ) $f(x) = 2x^{-1}\log x$

**108.** Ἐὰν $f_1(x) = f_2(x)f_3(x)$ καὶ εἶναι $f_2(x) = x\log x$ καὶ $f_1(x) = \log|\log x|$, εὕρετε τὴν $f'_1(x)$. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x εἶναι $f_3(x) = 0$. Ποῖαι αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν $f_2$ καὶ $f_3$.

**109.** Ἔστω ἡ συνάρτησις f μὲ $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty)$ συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος εἰς αὐτό, ἔστω ἀκόμη $f(0) = c$ καὶ ὅτι ὑπάρχει $\lambda \in R$, ὥστε $f'(x) \leqq \lambda$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

Δείξατε ὅτι: $f(x) \leqq c+\lambda x$.

**110.** Ἔστω τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv (x-z_0)^\nu+(x-z_1)^\nu+\ldots+(x-z_{\nu-1})^\nu$, ὅπου $x \in R$ καὶ $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $z^\nu = 1$ δείξατε ὅτι: $\nu f(x) - xf'(x) = \nu^2$ $\forall x \in R$. $(\nu \in N)$.

**111.** Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f_1$ καὶ $f_2$ μὲ $\mathcal{D}(f_1) = R$ καὶ $\mathcal{D}(f_2) = R$ καὶ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν:

$$f_1(x+y) = f_1(x)f_2(y)+f_1(y)f_2(x) \quad \forall x, \forall y \in R$$

$$f_1(0) = 0, \; f_2(0) = 1$$

καὶ ὅτι ἔχουν παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ καὶ εἶναι: $f'_1(0) = 1$ καὶ $f'_2(0) = 0$.

α) Ἀφοῦ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ $f_1$ εἶναι παραγωγίσιμος $\forall x \in R$ νὰ δειχθῇ ἀκολούθως ὅτι: $f'_1(x) = f_2(x)$.

β) Ἐὰν ἡ $f_2$ πληρῇ τὴν σχέσιν:

$$f_2(x+y) = f_2(x)f_2(y) - f_1(x)f_1(y) \quad \forall x, \forall y \in R$$

τότε καὶ αὐτὴ παραγωγίζεται $\forall x \in R$ καὶ ἰσχύει $f'_2(x) = -f_1(x)$.

γ) $f''_1(x)+f(x) = 0$, $f''_2(x)+f_2(x) = 0$

δ) $f_1^2(x)+f_2^2(x) = 1$

ε) Εὕρετε $f'_1(2x)$, $f'_2(2x)$, $f'_1(3x)$, $f'_2(3x)$ τῇ βοηθείᾳ τῶν $f_1(x)$, $f_2(x)$.

στ) Δείξατε ὅτι ἡ f εἶναι περιττὴ καὶ $f_1f_2$ ἀρτία.

**112.** Ἐὰν $0<c<x$ δείξατε ὅτι: $\dfrac{x}{c} > \log\dfrac{x}{c}$.

**113.** Ἐὰν $0<y \leqq x$ δείξατε ὅτι: $\dfrac{x}{y} - 1 \geqq \log\dfrac{x}{y} \geqq 1 - \dfrac{y}{x}$.

**114.** Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 - 3x+\alpha$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο ρίζας στὸ διάστημα $[0, 1)$.

**115.** Ἔστωσαν τὰ πολυώνυμα $f(x) \equiv x(x-1)(x-2)(x-3)$, $\varphi(x) \equiv 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6$, δείξατε ὅτι τὸ $\varphi(x)$ ἔχει ρίζας θετικὰς καὶ μικροτέρας τοῦ 3.

**116.** Ἐὰν διὰ τὸ πραγματικὸ πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι $f'(x)>0$ ἢ $f'(x)<0$ $\forall x \in R$, τότε τὸ $f(x)$ ἔχει τὸ πολὺ μιὰ πραγματικὴ ρίζα.

**117.** Ἐὰν $0<\alpha, \beta< \frac{\pi}{2}$ δείξατε ὅτι: $(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta \leq \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha \leq (\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$.

**118.** Ἔστωσαν τὰ πολυώνυμα $f(x) \equiv (x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu}+\lambda$, $\varphi(x) \equiv (x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}$. $[\mu(x-\beta) + \nu(x-\alpha)]$, $\mu, \nu \in N$. Δείξατε ὅτι τὸ $\varphi(x)$ ἔχει μία τουλάχιστον ρίζα στὸ διάστημα $(\alpha, \beta)$, $\alpha<\beta$.

**119.** Δείξατε ὅτι: $\tau o\xi_0 \varepsilon\varphi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\tau o\xi_0\eta\mu x = \frac{\pi}{4}$ $\forall x \in (-1, +1)$.

**120.** Δείξατε ὅτι ἐὰν $x^2 < \frac{1}{2}$ εἶναι:

$$3\tau o\xi_0\eta\mu x + 5\tau o\xi_0\sigma\upsilon\nu x + \tau o\xi_0\eta\mu 2x\sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}.$$

**121.** Δείξατε ὅτι: $\binom{\nu}{1} + 2\binom{\nu}{2} + 3\binom{\nu}{3} + \ldots + \nu\binom{\nu}{\nu} = \nu 2^{\nu-1}$

**122.** Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^{\nu} - 1 = 0$ εἶναι αἱ $1, \rho_1, \ldots, \rho_{\nu-1}$ δείξατε ὅτι:

$$(1-\rho_1)(1-\rho_2)\ldots(1-\rho_{\nu-1}) = \nu$$

**123.** Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραγωγισίμων συναρτήσεων καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ συνάρτησις $e^x$ παραγωγίζεται ἐν R, δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις: $\varphi(x) = \frac{xe^x-(\lambda+1)e^{-x}}{1+e^x}$ παραγωγίζεται ἐν R, ἔνθα λ πραγματικὴ παράμετρος.

Ἀκολούθως μὲ τὴν βοήθειαν τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως φ, εὕρετε τὰς τιμὰς τοῦ λ διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις φ εἶναι φθίνουσα.

**124.** Δείξατε ὅτι $\forall x \in R$ εἶναι: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.

**125.** Ἔστω ἡ συνάρηησις $f: R \to R$ μὲ τύπον, $f(x) = \prod_{i=1}^{\nu}(x-x_i)$, $x_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ καὶ $x>\max(x_i)$, $i=1,2,\ldots,\nu$

Δείξατε ὅτι: $\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} x_i + \nu\frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$

**126.** Θεωροῦμεν τὴν οἰκογένειαν τῶν πολυωνύμων $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{\nu}(x), \ldots$ ὁριζομένην ὡς ἀκολούθως:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x \text{ καὶ } f_{\nu}(x) = xf_{\nu-1}(x)+(\nu-1)f_{\nu-2}(x)\ \forall \nu \in N: \nu \geq 2 \quad (2)$$

Δείξατε ὅτι τὸ $f_{\nu}(x)$ εἶναι βαθμοῦ ν μὲ συντελεστὴν ἀνωτάτης δυνάμεως τοῦ **x** τὴν μονάδα καὶ ὅτι $f'_{\nu}(x) = \nu f_{\nu-1}(x)$ $\forall \nu \in N$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

## A ΟΡΙΣΜΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### 13.1 Ἀόριστον ὁλοκλήρωμα

**Ὁρισμός.** *Ἔστω $f_1(x)$ μία συνάρτησις ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς ἕνα διάστημα $\Delta \subseteq R$. Ἐὰν τώρα ὑπάρχῃ καὶ μία ἄλλη συνάρτησις $f_2(x)$ μὲ τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ ἔχουσα παράγωγον $f'_2(x)$ $\forall x\in\Delta$, ἤτοι ἐὰν ἰσχύῃ:*

$$f'_2(x) = f_1(x) \ \forall x\in\Delta$$

*τότε ἡ $f_2$ καλεῖται ἕνα ἀόριστον ὁλοκλήρωμα ἢ μία παράγουσα τῆς $f_1$ ἐν $\Delta$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἰσοδυναμίαν ἐξ ὁρισμοῦ:*

$$\int f_1(x)dx = f_2(x) \underset{\text{ορσ}}{\iff} f_2'(x) = f_1(x) \ \forall x\in\Delta$$

*ὅπου μὲ τὸ $\int f_1(x)dx = f_2(x)$ συμβολίζομεν τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς $f_1$.*

Τὸ σύμβολον $\int f(x)dx$ διαβάζεται «ὁλοκλήρωμα τῆς f τοῦ x ντὲ x».

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_2$, $f_3$ εἶναι δύο παράγουσαι τῆς $f_1$, τότε αἱ $f_2$, $f_3$ διαφέρουν κατὰ σταθερὰν $c\in R$ $\forall x\in\mathcal{D}(f_1)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ $f_2, f_3$ εἶναι παράγουσαι τῆς $f_1$ ἐν $\mathcal{D}(f_1)$, ἕπεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος, ὅτι $f'_2(x) = f_1(x)$ καὶ $f'_3(x) = f_1(x)$ $\forall x\in\mathcal{D}(f_1)$, ὁπότε καὶ $f'_2(x)=f'_3(x)$ $\forall x\in\mathcal{D}(f_1)$. Ἀλλὰ κατὰ γνωστὴν πρότασιν (Κεφ. 12, Πρότ. παραγώγων) αἱ $f_2, f_3$ θὰ διαφέρουν κατὰ σταθερὰν $c\in R$, ἤτοι $f_2(x) - f_3(x) = c \iff f_2(x) = f_3(x) + c$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. Ἰσχύει $\{\int f(x)dx\}' = f(x)$**

**Ἀπόδειξις.** Ἐὰν $f_1(x)$ εἶναι μία παράγουσα τῆς $f(x)$, ἤτοι: $f'_1(x) = f(x)$ ἔχομεν:

$$\{\int f(x)dx\}' = [f_1(x)+c]' = f(x)$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. Ἐὰν ἡ f ἔχῃ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα ἐν $(\alpha, \beta) \subseteq \mathcal{D}(f_1)$, τότε καὶ ἡ συνάρτησις λ.f, ὅπου λ σταθερά, ἔχει ἀόριστον ὁλοκλήρωμα καὶ ἰσχύει :** $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,\ \alpha < x < \beta$.

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν $\{\int \lambda f(x)dx\}' = \lambda f(x)\ \forall x \in (\alpha, \beta)$ καὶ $\{\lambda \int f(x)dx\}' = \lambda\{\int f(x)dx\}' = \lambda f(x)\ \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Ἄρα : $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx\ \forall x \in (\alpha, \beta)$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1, f_2$ ἔχουν ἀόριστον ὁλοκλήρωμα ἐν $\mathcal{D}(f_1, f_2)$, τότε καὶ ἡ συνάρτησις $f_1+f_2$ ἔχει ἀόριστον ὁλοκλήρωμα ἐν $\mathcal{D}(f_1, f_2)$ καὶ ἰσχύει :**

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

**Ἀπόδειξις.** Ἔχομεν $\{\int f_1(x) + f_2(x)\}' = f_1(x) + f_2(x)\ \forall x \in \mathcal{D}(f_1, f_2)$ καὶ $\{\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\}' = \{\int f_1(x)dx\}' + \{\int f_2(x)dx\}' = f_1(x) + f_2(x)\ \forall x \in \mathcal{D}(f_1, f_2)$.

Ἄρα $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\ \forall x \in \mathcal{D}(f_1, f_2)$. Ἡ πρότασις γενικεύεται καὶ διὰ πεπερασμένον πλῆθος προσθετέων καὶ μάλιστα ἰσχύει :

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_\nu f_\nu(x)]dx = \int \sum_{k=1}^{\nu} c_k f_k(x)dx =$$
$$= c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \ldots + c_\nu \int f_\nu(x)dx,$$

ὅπου $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ σταθεραὶ τοῦ R καὶ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ ὁλοκληρώσιμοι συναρτήσεις εἰς ἓν διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq R$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. Τὰ σύμβολα d καὶ $\int$ ἀλληλοαναιροῦνται.**

**Ἤτοι : i)** $\int df(x) = f(x)+c$

**ii)** $d\int f(x)dx = f(x)dx\quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$, **(c σταθερὰ)**

**Ἀπόδειξις.** i) Ἔχομεν $df(x) = f'(x)dx\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$, ὁπότε $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x)$.

ii) Ἔχομεν $d\int f(x)dx = \{\int f(x)dx\}'dx = f(x)dx$

**Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω**

**1.** Ὁ ὅρος «ἀόριστον ὁλοκλήρωμα» ἢ «παράγουσα» πολλάκις ἀποδίδεται διὰ τοῦ ὅρου «ἀρχικὴ συνάρτησις», π.χ. τῆς συναρτήσεως $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $x \in R^+$ ἓν ἀόριστον ὁλοκλήρωμα ἢ μία ἀρχικὴ συνάρτησις ἢ μία παράγουσα εἶναι ἡ $f_2(x) = \log x$.

**2.** Τὸ διάστημα (α, β) καλεῖται διάστημα ὁλοκληρώσεως τῆς f.

**3.** Μία συνάρτησις $f_2(x)$ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀόριστον ὁλοκλήρωμα μιᾶς συναρτήσεως $f_1(x)$ εἰς τὸ διάστημα (α, β) χωρὶς νὰ ὑπάρχῃ ἡ παρά-

γωγος τῆς $f_2(x)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Τότε διὰ νὰ εἶναι ἡ $f_2(x)$ ἓν ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς $f_1(x)$ ἐν $(\alpha, \beta)$ ἀπαιτοῦμεν ἡ $f_2(x)$ νὰ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$ καὶ ἡ παράγωγος τῆς $f_2(x)$ νὰ μὴν ὑπάρχῃ εἰμὴ μόνον εἰς πεπερασμένον πλῆθος σημείων τοῦ $(\alpha, \beta)$.

Οὕτως ἡ συνάρτησις $f_2(x) = |x|$ εἶναι συνεχὴς $\forall x \in R$ καὶ δὲν ὑπάρχει ἡ παράγωγος αὐτῆς διὰ $x = 0$, πλὴν ὅμως ἡ $f_2(x)$ εἶναι ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς $f_1(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 1 & \text{ἂν } x = 0. \end{cases}$

Πράγματι: $\int \frac{|x|}{x} dx = \int dx = x$ ἂν $x \geq 0$, $\int \frac{|x|}{x} dx = -\int dx = -x$ ἂν $x < 0$

**4.** Ἐὰν μία συνάρτησις $f_1(x)$ εἶναι συνεχὴς ἐν $(\alpha, \beta)$, τοῦτο ἀποτελεῖ ἱκανὴν συνθήκην διὰ τὴν ὕπαρξιν ἀορίστου ὁλοκληρώματος, ὄχι ὅμως καὶ ἀναγκαία, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν προηγουμένην παρατήρησιν, ὅπου ἡ συνάρτησις:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 1 & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$$

ἐνῷ ὑπάρχει παράγουσα αὐτῆς εἰς τὸ $(-\infty, +\infty)$ δὲν εἶναι ὅμως συνεχὴς εἰς αὐτό.

**5.** Ἡ παράγουσα μιᾶς συναρτήσεως $f_1(x)$, ἐὰν ὑπάρχῃ δὲν ὁρίζεται μονοσημάτως τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς προτάσεως 1.

**6.** Τὸ σύμβολον $\int f_1(x)dx$ δὲν εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον, ἀλλὰ παριστᾷ τὴν ὁποιανδήποτε παράγουσαν τῆς $f_1(x)$ εἰς τὸ διάστημα $(\alpha, \beta)$, δηλ. $\int f_1(x)dx = f_2(x)+c$, $f_2(x)$ παράγουσα τῆς $f_1(x)$, c σταθερὰ καὶ $x \in (\alpha, \beta)$.

**7.** Ἐὰν ἔχωμεν πρὸς ἀπόδειξιν προτάσεις τῆς μορφῆς $\int f_1(x)dx = f_2(x)+c$ εἰς τὸ $(\alpha, \beta)$, δυνάμεθα νὰ δείξωμεν τοῦτο δι' ἁπλῆς ἐπαληθεύσεως, δηλαδὴ ὅτι: $\{f_2(x)+c\}' = f_1(x)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** **Ἰσχύει** $\int x^\nu dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$, $\nu \in N$ $\forall x \in R$

**Ἀπάντησις.** Διότι εἶναι $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c\right)' = \frac{(\nu+1)x^\nu}{\nu+1} = x^\nu$ $\forall x \in R$ καὶ $\nu \in N$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** **Ἰσχύει** $\int x^{-\nu} dx = \frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c$ $\forall x \in R - \{0\}$, $\nu \in N$.

**Ἀπάντησις.** Διότι εἶναι: $\left(\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c\right)' = \frac{(-\nu+1)x^{-\nu}}{-\nu+1} = x^{-\nu}$ $\forall x \in R - \{0\}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** **Ἰσχύει** $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \ \forall x \in R - \{0\}$

**Ἀπάντησις.** Διότι εἶναι: $(\log|x|+c)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$ $\forall x \in R - \{0\}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.** **Ἰσχύει** $\int ημx dx = -συνx + c \ \forall x \in R$.

**Ἀπάντησις.** Διότι εἶναι $(-συνx + c)' = ημx \ \forall x \in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.** **Ἰσχύει** $\int συνx dx = ημx + c \ \forall x \in R$.

**Ἀπάντησις.** Διότι εἶναι $(ημx + c)' = συνx \ \forall x \in R$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.** **Ἰσχύει** $\int x^α dx = \frac{x^{α+1}}{α+1} + c, \ \forall α \in R - \{-1\}$ **καὶ** $\forall x \in R^+$

**Ἀπάντησις.** Διότι εἶναι: $\left(\frac{x^{α+1}}{α+1} + c\right)' = \frac{(α+1)x^α}{α+1} = x^α \ \forall x \in R^+$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.** **Ἰσχύει** $\int e^x dx = e^x + c, \ \forall x \in R$

**Ἀπάντησις.** Διότι εἶναι: $(e^x + c)' = e^x \ \forall x \in R$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.** **Ἰσχύει** $\int \frac{1}{συν^2 x} dx = εφx + c \ \forall x \in \left(kπ - \frac{π}{2}, kπ + \frac{π}{2}\right), \ k \in Z$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $(εφx + c)' = \left(\frac{ημx}{συνx} + c\right)' = \frac{1}{συν^2 x}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.** **Ἰσχύει** $\int \frac{1}{ημ^2 x} dx = -σφx + c \ \forall x \in (kπ, (k+1)π), \ k \in Z$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $(-σφx + c)' = \left(-\frac{συνx}{ημx} + c\right)' = \frac{1}{ημ^2 x}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.** **Ἰσχύει** $\int α^x dx = \frac{α^x}{\log α} + c, \ \forall x \in R, \ α \in R^+ - \{1\}$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $\left(\frac{α^x}{\log α} + c\right)' = \frac{α^x \log α}{\log α} = α^x \ \forall x \in R$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.** **Ἰσχύει** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = τοξ_0 ημx + c \ \forall x \in (-1, 1)$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $(τοξ_0 ημx + c)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \forall x \in (-1, 1)$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12.** **Ἰσχύει** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -τοξ_0 συνx + c \ \forall x \in (-1, 1)$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $(-τοξ_0 συνx + c)' = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \forall x \in (-1, 1)$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.** Ἰσχύει $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{τοξ}_0\text{εφ}x + c \ \forall x \in R$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $(\text{τοξ}_0\text{εφ}x + c)' = \frac{1}{1+x^2} \ \forall x \in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14.** Ἰσχύει $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\text{τοξ}_0\text{σφ}x + c \ \forall x \in R$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $(-\text{τοξ}_0\text{σφ}x + c)' = -\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} \ \forall x \in R$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.** Ἰσχύει $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c \ \forall x \in R - \{-1, 1\}$.

**Ἀπάντησις.** Διότι $\left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c\right)' = \frac{1}{2} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \left| \frac{1+x}{1-x} \right|' =$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{1}{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|} \, \frac{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|}{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2} \ \forall x \in R - \{-1, 1\}.$$

*Σημείωσις.* Εἰς τὰ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματα ἀνάγονται τὰ πλεῖστα ἀπὸ τὰ ἀόριστα ὁλοκληρώματα, τὰ ὁποῖα θὰ συναντήσωμεν κατωτέρω, διὰ τὸν λόγον αὐτὸν καλὸν θὰ εἶναι νὰ τὰ ἀπομνημονεύσωμεν.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἐὰν ἡ f εἶναι συνεχὴς ἐν $(\alpha, \beta)$, ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος αὐτῆς $\forall x \in (\alpha, \beta)$ καὶ εἶναι $f(x) \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε:**

**Ἰσχύει:** $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log |f(x)| + c \ \forall x \in (\alpha, \beta)$$

**Ἀπόδειξις.** Διότι $(\log |f(x)| + c)' = \frac{1}{|f(x)|} |f(x)|' = \frac{1}{|f(x)|} \, \frac{|f(x)|}{f(x)}$ $f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x-k}$ μὲ $k \in R$ καὶ διάστημα ὁλοκληρώσεως $(-\infty, k) \cup (k, +\infty)$.**

**Ἀπάντησις.** Ἐδῶ εἶναι $f(x) = x - k$ καὶ $f'(x) = 1$, αἱ δὲ f καὶ f′ εἶναι συνεχεῖς $\forall x \in R - \{k\}$ καὶ $f(x) \neq 0 \ \forall x \in R - \{k\}$, ἄρα:

$$\int \frac{dx}{x-k} = \int \frac{(x-k)'}{x-k}\, dx = \log |x-k| + c.$$

**Παρατήρησις 1.** Ἐὰν ἡ παράγωγος τοῦ παρονομαστοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμητήν, τὸ ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ παρονομαστοῦ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα:** $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+5}$.

**Ἀπάντησις.** Εἶναι $(x^2+3x+5)' = 2x+3$, ἄρα:

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+5} = \int \frac{d(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5} = \log(x^2+3x+5)+c$$

**Παρατήρησις 2.** Ἐὰν τὸ διαφορικὸν εἶναι ἢ δύναται νὰ γίνῃ ὅμοιον μὲ τὸν παρονομαστήν, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται μὲ τὸν νεπέρειον λογάριθμον τοῦ παρονομαστοῦ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x dx}{\eta\mu x}$ $x \in R$ β) $\int \frac{dx}{x+5}$ $x \in R - \{-5\}$.

**Ἀπάντησις.** α) Εἶναι $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x dx}{\eta\mu x} = \int \frac{d\eta\mu x}{\eta\mu x} = \log|\eta\mu x|+c$

β) $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{(x+5)'dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \log|x+5|+c$.

**Παρατήρησις 3.** Εἰς τὰ «τριγωνομετρικὰ» ὁλοκληρώματα διὰ νὰ ὁλοκληρώσωμεν πρέπει τὸ διαφορικὸν νὰ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τόξον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \eta\mu(x+k)dx$ β) $\int \sigma\upsilon\nu\alpha x dx$ γ) $\int \eta\mu \frac{\alpha x}{\beta} dx$

**Ἀπάντησις.** α) Εἶναι $\int \eta\mu(x+k)d(x+k) = -\sigma\upsilon\nu|x+k|+c$

β) $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx = \int \sigma\upsilon\nu(\alpha x)\frac{1}{\alpha}(\alpha x)'dx = \frac{1}{\alpha}\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x)d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\eta\mu|\alpha x|+c$

γ) $\int \eta\mu \frac{\alpha x}{\beta} dx = \frac{\beta}{\alpha}\int \eta\mu \frac{\alpha x}{\beta} d\left(\frac{\alpha x}{\beta}\right) = -\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\left|\frac{\alpha x}{\beta}\right| + c$

**Παρατήρησις 4.** Εἰς τὰ ὁλοκληρώματα ποὺ περιέχουν τὸν νεπέρειον λογάριθμον τοῦ e δυνάμεθα νὰ ὁλοκληρώσωμεν ἐὰν τὸ διαφορικὸν εἶναι ὅμοιον μὲ τὸν ἐκθέτην τοῦ e.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int e^{\alpha x}dx$, $\alpha \in R - \{0\}$, $x \in R$ β) $\int e^{-\frac{x}{3}}dx$, $x \in R$

**Ἀπάντησις.** α) Εἶναι $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+c$

β) $\int e^{-\frac{x}{3}}dx = -3\int e^{-\frac{x}{3}}d\left(-\frac{x}{3}\right) = -3e^{-\frac{x}{3}}+c$

**Παρατήρησις 5.** Εἰς τὸ διαφορικὸν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν μίαν σταθεράν, ἐὰν ὅμως τὸ διαφορικὸν πολλαπλασιασθῇ

(ἀντιστοίχως διαιρεθῇ) ἐπὶ μίαν σταθεράν, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα διαιρεῖται (ἀντιστοίχως πολλαπλασιάζεται) ἐπὶ τὴν σταθερὰν αὐτήν.

Ἐπίσης εἰς τὸ διαφορικὸν εἶναι δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ οἱαδήποτε παράστασις, ἀρκεῖ προηγουμένως νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτῆς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Εἶναι: α) $\int dx = \int d(x \pm c) = x \pm c$

β) $\int dx = \frac{1}{k} \int d(kx) = \frac{1}{k} kx + c = x + c$

γ) $\int dx = k \int d\left(\frac{x}{k}\right) = k \frac{x}{k} + c = x + c$

δ) $\int x^{\nu} dx = \int d\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right) = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$

## 13. 2 Βασικὸς τρόπος ὁλοκληρώσεως

### I. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

Ἡ μέθοδος ἀπορρέει ἐκ τῆς κατωτέρω προτάσεως καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τῶν ὁποίων οἱ τύποι ἀναγράφονται κατωτέρω.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f_1$ ἔχῃ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα εἰς ἕνα διάστημα $(\alpha, \beta)$ καὶ ἡ συνάρτησις $f_2$ εἶναι ὡρισμένη καὶ παραγωγίσιμος εἰς τὸ $(\gamma, \delta)$ καὶ $R(f_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τότε, ὡς γνωστόν, ὁρίζεται ἡ συνάρτησις $f = f_1 \circ f_2$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$ καὶ ἰσχύει:**

$$\int f_1(f_2(x)) f'_2(x) dx = \int f_1(\theta) d\theta \mid \theta = f_2(x), \ \alpha < x < \beta$$

**ὅπου ὁ συμβολισμὸς $\mid \theta = f_2(x)$ σημαίνει ὅτι μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $\int f_1(\theta) d\theta$ ὀφείλομεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\theta$ μὲ τὸ $f_2(x)$.**

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω $\varphi(\theta)$ μία παράγουσα τοῦ $\int f_1(\theta) d\theta$, τότε εἶναι: $\int f_1(\theta) d\theta = \varphi(\theta) + c$. Ἄρα διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\int f_1[f_2(x)] f'_2(x) dx = \varphi(f_2(x)) + c$$

Ἀλλὰ $\{\varphi(f_2(x)) + c\}' = \varphi'[f_2(x)] f'_2(x) = \varphi'(\theta) f'_2(x) = f_1(\theta) f'_2(x) = f_1[f_2(x)] f'_2(x)$.
Ἐπομένως $\int f_1[f_2(x)] f'_2(x) dx = \varphi[f_2(x)] + c$.

Βάσει τῆς προτάσεως πλεῖστα ὅσα ὁλοκληρώματα ἁπλουστεύονται διὰ μιᾶς καταλλήλου ἀντικαταστάσεως ἀναγόμενα οὕτως εἰς στοιχειώδη. Ἕνας βασικὸς τρόπος, λοιπόν, ὑπολογισμοῦ ὁλοκληρωμάτων εἶναι ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι μία ἁπλῆ ἀλλαγὴ μεταβλητῆς. Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ καταστήσουν πλέον σαφῆ τὴν μέθοδον.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{\text{συν}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ β) $\int(\text{συν}x - \text{ημ}x)\sqrt{\text{ημ}x+\text{συν}x}\,dx$

γ) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$ δ) $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

**Ἀπάντησις.** α) Θέτομεν $\sqrt{x} = t > 0$. Ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος καὶ εἶναι $x = t^2/t > 0$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται: $\int \frac{\text{συν}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\text{συν}\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}}\,d(t^2) =$

$$= \int \frac{\text{συν}t}{t}\,2t\,dt = 2\int \text{συν}t\,dt = 2\text{ημ}t + c = 2\text{ημ}\sqrt{x} + c, \ \forall x \in R^+$$

β) Θέτομεν $\text{ημ}x + \text{συν}x = \theta \geq 0$ ἐπειδὴ δὲ $(\text{ημ}x+\text{συν}x)' = \text{συν}x - \text{ημ}x \neq 0$ ἡ συνάρτησις ἀντιστρέφεται καὶ ἐὰν $\text{ημ}x+\text{συν}x \geq 0$, $\text{συν}x - \text{ημ}x \neq 0$ ἔχομεν $d\theta = (\text{συν}x - \text{ημ}x)dx$, ὁπότε τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται:

$$\int(\text{συν}x - \text{ημ}x)\sqrt{\text{ημ}x+\text{συν}x}\,dx = \int\sqrt{\theta}\,d\theta = \int \theta^{\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{\theta^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\theta^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(\text{ημ}x+\text{συν}x)^3} + c.$$

γ) Θέτομεν $x^2+1 = \theta^3$, ὁπότε $2x\,dx = 3\theta^2 d\theta \Rightarrow x\,dx = \frac{3}{2}\theta^2 d\theta$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\theta^2 d\theta}{\theta^2} = \frac{3}{2}\int d\theta = \frac{3}{2}\theta + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2+1} + c.$$

δ) Θέτομεν $\sqrt{x} = t \geq 0$. Ἡ συνάρτησις ἀντιστρέφεται καὶ εἶναι ἡ $x = t^2/t \geq 0$, εἶναι δὲ $dx = 2t\,dt$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t^3 dt}{1+t} = 2\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\int t^2 dt - 2\int t\,dt +$$

$$+ 2\int dt - 2\int \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{2}{3}t^3 - 2\frac{t^2}{2} + 2t - 2\log(1+t) + c =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + 2\sqrt{x} - 2\log(1+\sqrt{x}) + c$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \text{ημ}(\alpha x+\beta)dx$ β) $\int \text{συν}(\alpha x+\beta)dx$ γ) $\int e^{\alpha x+\beta}dx$

δ) $\int (2x+1)e^{x^2+x}dx$ ε) $\int \frac{dx}{(x-\rho)^\nu}$ στ) $\int \frac{dx}{x^2+kx+\lambda}$

**Ἀπάντησις.** α) Θέτομεν $\alpha x+\beta = t \Rightarrow \alpha dx = dt$ καὶ τὸ $\int \text{ημ}(\alpha x+\beta)dx$ γίνεται

$$\int(\text{ημ}t)\frac{1}{\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int \text{ημ}t\,dt = -\frac{1}{\alpha}\text{συν}t + c = -\frac{1}{\alpha}\text{συν}(\alpha x+\beta) + c.$$

β) Θέτομεν $\alpha x+\beta = t \Rightarrow \alpha dx = dt$ καὶ τὸ $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx$ γίνεται

$$\int (\sigma\upsilon\nu t)\frac{1}{\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int \sigma\upsilon\nu t\,dt = \frac{1}{\alpha}\,\eta\mu t+c = \frac{1}{\alpha}\,\eta\mu(\alpha x+\beta)+c.$$

γ) Θέτομεν $\alpha x+\beta = t \Rightarrow \alpha dx = dt$ καὶ τὸ $\int e^{\alpha x+\beta}dx$ γίνεται

$$\int e^t\frac{1}{\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int e^t dt = \frac{1}{\alpha}\,e^t+c = \frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha x+\beta}+c.$$

δ) Θέτομεν $x^2+x = t \Rightarrow 2xdx+dx = dt \Rightarrow (2x+1)dx = dt$ καὶ τὸ $\int(2x+1)e^{x^2+x}dx$ γίνεται $\int e^t dt = e^t+c = e^{x^2+x}+c$.

ε) Ἐὰν $\nu \neq 1$ θέτομεν $x-\alpha = t \Rightarrow dx = dt$ καὶ τὸ $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^\nu}$ γίνεται

$$\int \frac{dt}{t^\nu} = \int t^{-\nu}dt = -\frac{1}{\nu-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{\nu-1}}+c.$$

Ἐὰν δὲ $\nu = 1$ θέτομεν καὶ πάλιν $x-\alpha = t \Rightarrow dx = dt$ καὶ λαμβάνομεν

$$\int \frac{dt}{t} = \log|t|+c = \log|x-\alpha|+c.$$

στ) Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1) Ἐὰν αἱ ρίζαι τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἁπλαῖ.

2) Ἐὰν εἶναι πραγματικαὶ πολλαπλαῖ.

3) Ἐὰν εἶναι μιγαδικαί.

στ$_1$) Ἔστω, πρῶτον, ὅτι αἱ ρίζαι $\rho_1, \rho_2$ εἶναι πραγματικαὶ ἁπλαῖ, τότε ἀναλύομεν εἰς μερικὰ κλάσματα κατὰ τὴν ταυτότητα

$$\frac{1}{x^2+kx+\lambda} \equiv \frac{1}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)} \equiv \frac{A}{x-\rho_1}+\frac{B}{x-\rho_2}$$

ὅπου τὰ A, B ὑπολογίζονται ἐκ τοῦ συστήματος $A+B = 0$, $A\rho_1+B\rho_2 = -1$ καὶ ἔχομεν:

$$\int \frac{dx}{x^2+kx+\lambda} = \int\left(\frac{A}{x-\rho_1}+\frac{B}{x-\rho_2}\right)dx = A\int\frac{dx}{x-\rho_1}+B\int\frac{dx}{x-\rho_2} =$$
$$= A\log|x-\rho_1| + B\log|x-\rho_2| + c.$$

στ$_2$) Ἐὰν τὸ τριώνυμον ἔχῃ διπλῆν πραγματικὴν ρίζαν, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{x^2+kx+\lambda} = \int\frac{dx}{(x-\rho)^2} = -\frac{1}{(x-\rho)}+c$$

στ$_3$) Ἐὰν τὸ τριώνυμον ἔχῃ μιγαδικὰς ρίζας, τότε κατὰ τὰ γνωστὰ τίθεται ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος δύο τετραγώνων τῆς μορφῆς: $x^2+kx+\lambda \equiv (x-\alpha)^2+\beta^2$ (1) ὅπου τὰ α, β ὑπολογίζονται ἐκ τῆς ταυτότητος (1). Θέτομεν $x-\alpha = \beta t \Rightarrow dx = \beta dt$ καὶ ἔχομεν:

$$\int\frac{dx}{x^2+kx+\lambda} = \int\frac{\beta dt}{\beta^2t^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\beta}\,\tau o\xi_0\varepsilon\varphi t+c = \frac{1}{\beta}\,\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\frac{x-\alpha}{\beta}+c.$$

*Σημείωσις.* Ὁμοίως ὑπολογίζονται καὶ τὰ ὁλοκληρώματα $\int\eta\mu\alpha x\sigma\upsilon\nu\beta x dx$, $\int\eta\mu\alpha x\eta\mu\beta x dx$, $\int\sigma\upsilon\nu\alpha x\sigma\upsilon\nu\beta x dx$, $\alpha, \beta\in R$ ἢ γενικώτερα τά:

1) $\int\eta\mu(\alpha x+\beta)\eta\mu(\gamma x+\delta)dx$ 2) $\int\eta\mu(\alpha x+\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma x+\delta)dx$ γ) $\int\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma x+\delta)dx$

Διότι βάσει τῶν τύπων:

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$$

ἀνάγονται εἰς ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς :

$$\int \eta\mu(\alpha x+\beta)dx = -\frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)+c, \quad \int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x+\beta)+c$$

## 13. 3 Τύποι Ὁλοκληρωμάτων

### Α. Ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως

**Ὁρισμός.** *Μία συνάρτησις $f$ καλεῖται ρητὴ ὅταν ὁ τύπος αὐτῆς εἶναι πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ $x$.*

*Συμβολικῶς:*

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0} \qquad (1)$$

*ὅπου $\alpha_\kappa, \beta_\lambda, k = 0, 1, 2, \ldots, \nu, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu$ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha_\nu\beta_\mu \neq 0$ καὶ $\mu, \nu \in N$.*

Ὡς γνωστὸν κάθε κλάσμα τῆς μορφῆς (1) ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων, ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν δὲ ὁ βαθμὸς τοῦ A(x) εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ βαθμοῦ τοῦ B(x), τότε διὰ διαιρέσεως τοῦ A(x) διὰ τοῦ B(x) εὑρίσκομεν πηλίκον Π(x) καὶ ὑπόλοιπον υ(x) ἔτσι, ὥστε :

$$\frac{A(x)}{B(x)} \equiv \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{B(x)}, \text{ ὅπου } \beta\alpha\theta\upsilon(x) < \beta\alpha\theta B(x).$$

Ἑπομένως καὶ πάλιν ἡ ρητὴ συνάρτησις f(x) ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων δι' ἀναλύσεως τοῦ κλάσματος $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$.

Διὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ κλάσματος $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ μὲ $\beta\alpha\theta B(x) > \beta\alpha\theta A(x)$ διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

**α)** Ἐὰν τὸ πολυώνυμον B(x) ἔχῃ μόνον ἁπλᾶς ρίζας $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$, τότε : $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{\beta_\mu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\mu)} = \frac{c_1}{x-\rho_1} + \frac{c_2}{x-\rho_2} + \ldots + \frac{c_\mu}{x-\rho_\mu}$, ὅπου τὰ $c_1, c_2, c_2, \ldots, c_\mu$ ὑπολογίζονται διὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων.

**β)** Ἐὰν τὸ πολυώνυμον B(x) ἔχῃ μόνον πραγματικὰς ρίζας ἁπλᾶς ἢ

πολλαπλάς, τότε: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{\beta_\mu(x-\rho_1)(x-\rho_2)^\varkappa\ldots(x-\rho_\mu)^\lambda} = \frac{c_1}{x-\rho_1} +$

$+ \frac{c_2}{x-\rho_2} + \frac{c_3}{(x-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{c_{\varkappa+1}}{(x-\rho_2)^\varkappa} + \frac{c'_1}{(x-\rho_\mu)} + \frac{c'_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \ldots +$

$+ \frac{c'_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda}$ ὅπου τὰ $c_1, c_2, \ldots, c_{\varkappa+1}, c'_1, \ldots, c'_\lambda$ ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ $B(x)$ ἰσοῦται μὲ $\mu$.

γ) Ἐὰν τὸ $B(x)$ ἔχῃ τὴν μορφὴν $B(x) = (x^2+\alpha x+\beta)^\varkappa$ μὲ $\alpha^2-4\beta < 0$, τότε: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^\varkappa} = \frac{c_1x+c'_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{c_2x+c'_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + \ldots +$

$+ \frac{c_\varkappa x+c'_\varkappa}{(x^2+\alpha x+\beta)^\varkappa}$, ὅπου τὰ $c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots, c_\varkappa, c'_\varkappa$ ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστά.

δ) Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $B(x)$ ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς καὶ μιγαδικὰς ἁπλᾶς ἢ πολλαπλάς, τότε:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_2)^\varkappa(x^2+\alpha x+\beta)\ldots(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^\lambda} = \frac{A_1}{x-\rho_1} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\rho_2} + \frac{B_2}{(x-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{B_\varkappa}{(x-\rho_2)^\varkappa} + \frac{\Gamma_1x+\Gamma_0}{x^2+\alpha x+\beta} +$$

$+ \frac{\Delta_1x+\Delta'_1}{x^2+\alpha_1x+\beta_1} + \ldots + \frac{\Delta_\lambda x+\Delta'_\lambda}{(x^2+\alpha_1x+-\beta_1)^\lambda}$, ὅπου αἱ σταθεραὶ $A_1, B_1, B_2, \ldots, B_\varkappa, \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\lambda$ ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστά.

Κατὰ συνέπειαν κάθε ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς $\int \frac{A(x)}{B(x)}dx$ ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ὁλοκληρωμάτων μιᾶς τῶν μορφῶν:

1) $\int f(x)dx$     2) $\int \frac{dx}{x-\rho}$

3) $\int \frac{dx}{(x-\rho)^\varkappa}$     4) $\int \frac{kx+\lambda}{x^2+\alpha x+\beta}dx$ μὲ $\alpha^2-4\beta<0$

5) $\int \frac{kx+\lambda}{(x^2+\alpha x+\beta)^\mu}dx$ μὲ $\alpha^2-4\beta<0$.

Ἐξ αὐτῶν τὰ (1), (2), (3), (4) εἶναι γνωστὰ (Παράδειγμα 2 σελ. 183) τὸ ὁλοκλήρωμα (5) ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\int \frac{kx+\lambda}{(x^2+\alpha x+\beta)^\mu}dx = \frac{k}{2}\int \frac{2x+\frac{2\lambda}{k}+\alpha-\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^\mu}dx =$$

$$= \frac{k}{2}\int \frac{(x^2+\alpha x+\beta)'}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\mu}}\,dx + \frac{k}{2}\left(\frac{2\lambda}{k}-\alpha\right)\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\mu}} =$$

$$= \frac{k}{2}\int \frac{d(x^2+\alpha x+\beta)}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\mu}} + \frac{k}{2}\left(\frac{2\lambda}{k}-\alpha\right)\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\mu}} =$$

$$= \frac{(x^2+\alpha x+\beta)^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{k}{2}\left(\frac{2\lambda}{k}-\alpha\right)\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\mu}}$$ μὲ $\mu \neq 1$. Μένει ἑπομένως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\mu}}$ μὲ $\alpha^2-4\beta<0$.

Εἶναι $x^2+\alpha x+\beta = \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}\right)^2$ καὶ ἂν θέσωμεν $x+\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}\,t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}\,dt$. Ἄρα $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\mu}} =$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^{2\mu-1}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\mu}}.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα $I_{\mu} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{\mu}}$ διὰ $\mu = 1$ εἶναι γνωστὸν καὶ ἴσον μὲ $I_1 =$ τοξ$_0$εφx, μὲ $\mu \neq 1$ δίδει $I_{\mu} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{\mu}}\,dt = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{\mu}}\,dt -$

$$- \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{\mu}}\,dt = I_{\mu-1} - \frac{1}{2}\int \frac{t2tdt}{(1+t^2)^{\mu}} = I_{\mu-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int t\left\{\frac{(1+t^2)^{1-\mu}}{1-\mu}\right\}' dt = I_{\mu-1} - \frac{1}{2}\left(t\,\frac{(1+t^2)^{1-\mu}}{1-\mu} - \int \frac{(1+t^2)^{1-\mu}}{1-\mu}\,t'dt\right) =$$

$$= I_{\mu-1} - \frac{1}{2(1-\mu)}\,\frac{t}{(1+t^2)^{\mu-1}} + \frac{1}{2(1-\mu)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\mu-1}} = I_{\mu-1} -$$

$$- \frac{1}{2(1-\mu)}\,\frac{t}{(1+t^2)^{\mu-1}} + \frac{1}{2(1-\mu)}\,I_{\mu-1}$$

Τελικῶς: $I_{\mu} = \frac{2\mu-3}{2(\mu-1)}\,I_{\mu-1} + \frac{t}{2(\mu-1)(1+t^2)^{\mu-1}}$ μὲ $\mu \geq 2$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

**α)** $\int \frac{x^3+1}{(x-1)(x^2+3x+6)}\,dx$ **β)** $\int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx$ **γ)** $\int \frac{x^3-5x^2+3x-18}{(x+1)(x-2)^4}\,dx$

**Ἀπάντησις. α)** Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν $x^3+1 : (x-1)(x^2+3x+6)$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γράφεται: $\int\left(1-\frac{2x^2+3x-7}{(x-1)(x^2+3x+6)}\right)dx = \int dx - \int \frac{2x^2+3x-7}{(x-1)(x^2+3x+6)}\,dx =$

$= x - \int \frac{A dx}{x-1} - \int \frac{Bx+\Gamma}{x^2+3x+6} dx$, όπου τά A, B, Γ υπολογίζονται έκ τής ταυτότητος

$\frac{2x^2+3x-7}{(x-1)(x^2+3x+6)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+3x+6}$ καί είναι $A = -\frac{1}{5}$, $B = \frac{11}{5}$, $\Gamma = \frac{29}{5}$.

Άρα είναι $\int \frac{x^3+1}{(x-1)(x^2+3x+6)} dx = x + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{11x+29}{x^2+3x+6} dx =$

$= x + \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{11}{5}\int \frac{x+\frac{29}{11}}{x^2+3x+6} dx = x + \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{11}{10}$

$\int \frac{2x+\frac{58}{11}}{x^2+3x+6} dx = x + \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{11}{10}\int \frac{(x^2+3x+6)' + \frac{58}{11} - 3}{x^2+3x+6} dx =$

$= x + \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{11}{10}\,\frac{25}{11}\int \frac{d(x^2+3x+6)}{x^2+3x+6} = x + \frac{1}{5}\log|x-1| -$

$- \frac{5}{2}\log(x^2+3x+6) + c.$

β) Μετά τήν διαίρεσιν άριθμητοῦ διά τοῦ παρονομαστοῦ τό ὁλοκλήρωμα γίνεται:

$\int \frac{x^5+2}{x^3-1} dx = \int \left(x^2 + \frac{x^2+2}{x^3-1}\right) dx = \int x^2 dx + \int \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \frac{x^3}{3} +$

$+ \int \frac{A dx}{x-1} + \int \frac{(Bx+\Gamma)dx}{x^2+x+1}$, όπου τά A, B, Γ υπολογίζονται έκ τής ταυτότητος

$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}$ καί είναι $A = 1$, $B = 0$, $\Gamma = -1$, τό δέ ὁλοκλήρωμα γίνεται: $\int \frac{x^5+2}{x^3-1} = \frac{x^3}{3} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x^3}{3} + \log|x-1| -$

$- \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$. Θέτομεν $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$ καί λαμβάνομεν: $\int \frac{x^5+2}{x^3-1} dx = \frac{x^3}{3} + \log|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\frac{3}{4} t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{x^3}{3} + \log|x-1| -$

$- \frac{2\sqrt{3}}{3}$ τοξ$_0$εφ$t + c = \frac{x^3}{3} + \log|x-1| - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ τοξ$_0$εφ $\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$

γ) Θέτομεν $\frac{x^3-5x^2+3x-18}{(x+1)(x-2)^4} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{(x-2)^2} + \frac{c_3}{(x-2)^3} +$

$+ \frac{c_4}{(x-2)^4}$ καί εὑρίσκομεν: $A = -\frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = -8$.

Άρα $\int \frac{x^3-5x^2+3x-18}{(x+1)(x-2)^4} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-2)^3} -$

$-8\int \frac{dx}{(x-2)^4} = -\frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\log|x-2| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{3}\,\frac{1}{(x-2)^3} + c$

**Β. Ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς $\int R(x, \sqrt[\nu]{kx+\lambda})\,dx$**

**(ὅπου R ρητὴ συνάρτησις τῶν x, $\sqrt[\nu]{kx+\lambda}$)**

Ταῦτα ὑπολογίζονται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\sqrt[\nu]{kx+\lambda} = t \Rightarrow kx+\lambda =$ $= t^\nu \Rightarrow dx = \frac{\nu t^{\nu-1}}{k}\,dt$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται :

$$\int R(x, \sqrt[\nu]{kx+\lambda})dx = \int R\left(\frac{t^\nu-\lambda}{k}, t\right)\frac{\nu t^{\nu-1}}{k}\,dt = \int f(t)dt,$$

ὅπου f(t) ρητὴ συνάρτησις τοῦ t.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα :**

α) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ β) $\int x\sqrt{2x-3}\,dx$

**Ἀπάντησις.** α) Θέτομεν $\sqrt{x^2-1} = t>0 \Rightarrow x^2-1 = t^2 \Rightarrow 2xdx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{t}{x}\,dt$ $x \neq 0$ ἑπομένως $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dt}{x^2} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \text{τοξ}_0\text{εφ}t+c = \text{τοξ}_0\text{εφ}(\sqrt{x^2-1})+c.$

β) Θέτομεν $\sqrt{2x-3} = t \geq 0 \Rightarrow 2x-3 = t^2 \Rightarrow 2dx = 2tdt \Rightarrow dx = tdt$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται $\int x\sqrt{2x-3}\,dx = \int xt^2dt = \int \frac{t^2+3}{2}\,t^2dt = \frac{1}{2}\int t^4dt + \frac{3}{2}\int t^2dt =$ $= \frac{t^5}{10} + \frac{1}{2}t^3+c = \frac{(\sqrt{2x-3})^5}{10} + \frac{(\sqrt{2x-3})^3}{2} + c.$

**Γ. Ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς : $\int R\left(x, \sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$**

**(ὅπου R ρητὴ συνάρτησις τῶν x, $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ καὶ $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0$).**

Τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς αὐτῆς ὑπολογίζονται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = t \Rightarrow x = \frac{\delta t^\nu-\beta}{\alpha-\gamma t^\nu}$, $dx = \nu(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{t^{\nu-1}}{(\alpha-\gamma t^\nu)^2}\,dt$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται : $\int R\left(x, \sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx = \int R\left(\frac{\delta t^\nu-\beta}{\alpha-\gamma t^\nu}, t\right)\nu(\alpha\delta-\beta\gamma)$ $\frac{t^{\nu-1}}{(\alpha-\gamma t^\nu)^2}\,dt = \int f(t)dt$, ὅπου f(t) ρητὴ συνάρτησις τοῦ t.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ β) $\int \frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

**Ἀπάντησις.** α) Θέτομεν $\sqrt[3]{x^2+1} = t \Rightarrow x^2+1 = t^3 \Rightarrow 2xdx = 3t^2dt$ καὶ ἔχομεν:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{3}{2}\int \frac{t^2dt}{t} = \frac{3}{2}\int tdt = \frac{3}{2}\,\frac{t^2}{2} + c = \frac{3t^2}{4} + c = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x^2+1})^2+c.$$

β) Θέτομεν $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t>0,\ -1<x<1$ καὶ λαμβάνομεν $x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$

ὁπότε $\int \frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{t^2+3}{2}\,t\,\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int \frac{2t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}dt =$

$$= -2\int\left[1 + \frac{1}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t^2)^2}\right]dt = -2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} + 4\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= -2t - 2\tau o\xi_0\varepsilon\varphi t + 4\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\tau o\xi_0\varepsilon\varphi t\right) + c = -2t + \frac{2t}{t^2+1} + c = (x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c$$

## Δ. Ὁλοκλήρωμα μὲ τύπον: $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$
## (ὅπου R ρητὴ συνάρτησις τῶν x, $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$).

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὁλοκληρωμάτων αὐτοῦ τοῦ τύπου διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

α) Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, ὁπότε ἡ R εἶναι ρητὴ συνάρτησις τοῦ x καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα ὑπολογίζεται.

β) Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma>0$ τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει ρίζας $\rho_1, \rho_2 \in R$ μὲ $\rho_1 \neq \rho_2$ καὶ τότε θέτομεν $\sqrt{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)} = (x-\rho_1)t \Rightarrow \alpha(x-\rho_2) = (x-\rho_1)t^2 \Rightarrow x = \frac{\rho_1 t^2 - \alpha\rho_2}{t^2-\alpha},\ dx = 2\alpha(\rho_2-\rho_1)\frac{t}{(t^2-\alpha)^2}dt$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως.

γ) Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma<0$, τότε θέτομεν $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x-t) \Rightarrow \alpha x^2 + \beta x+\gamma = \alpha(x-t)^2 \Rightarrow x = \frac{\alpha t^2-\gamma}{2\alpha t+\beta}$, ὁπότε καὶ πάλιν ἀναγόμεθα εἰς ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τοῦ t καὶ ὑπολογίζεται.

*Σημείωσις.* Ἡ ἀντικατάστασις $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x-t)$ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ ἂν $\beta^2 - 4\alpha\gamma>0$ καὶ $\alpha>0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$ β) $\int \sqrt{3x^2+3x+1}\,dx$ γ) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ δ) $\int \sqrt{1+3x^2}\,dx$

**Ἀπάντησις.** α) Ἐπειδὴ τὸ τριώνυμον $x^2 - 3x+2$ ἔχει ρίζας τὰς 1, 2 θέτομεν

$\sqrt{(x-1)(x-2)} = (x-1)t \Rightarrow x-2 = (x-1)t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{t^2-1}$, $dx = \frac{2t}{(t^2-1)^2}$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γράφεται : $-2\int \frac{2t^2-3}{(t^2-1)^2} dt = -\frac{5}{2}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)^2} + \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}$

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{5}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{5}{2}\log|t+1| - \frac{1}{2(t+1)} + c = \frac{5}{2}$$

$$\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right) + c = \frac{5}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{t}{t^2-1} + c = \frac{5}{2}$$

$$\log\left|\frac{\sqrt{x^2-3x+2} + x-1}{\sqrt{x^2-3x+2} + 1-x}\right| - \frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2} + 1-x} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2} + x-1}\right] + c.$$

β) Ἐπειδὴ $\alpha = 3 > 0$ θέτομεν $\sqrt{3x^2+3x+1} = \sqrt{3}(x-t) \Rightarrow x = \frac{3t^2-1}{6t+3}$, $dx =$ $= \frac{18t^2+18t+6}{(6t+3)^2}$ dt καὶ ἔχομεν: $\int \sqrt{3x^2+3x+1}\,dx = -\frac{2\sqrt{3}}{9}\int \frac{(3t^2+3t+1)^2}{(2t+1)^3}dt$, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται κατὰ τὰ γνωστά.

γ) Εἶναι $\alpha = -1 < 0$ καὶ ρίζαι τοῦ $1-x^2$ τὸ 1, $-1$ θέτομεν ἄρα $\sqrt{1-x^2} = (x+1)t \Rightarrow$ $\Rightarrow (1+x)(1-x) = (1+x)^2t^2 \Rightarrow 1-x = (1+x)t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$ dt καὶ

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1+t)^2}{2(1+t^4)}\,\frac{1+t^2}{2t}\,\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = -\int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$ θέτομεν τώρα

$\frac{t^2-1}{t} = \varphi \Rightarrow d\varphi = \left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ dt καὶ ἔχομεν $-\int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = -\int \frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}+t^2}dt =$

$$= -\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{τοξ}_0\text{εφ}\,\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{τοξ}_0\text{εφ}\,\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + c =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{τοξ}_0\text{εφ}\left(\frac{-x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + c.$$

δ) Θέτομεν $\sqrt{1+3x^2} = t - x\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2\sqrt{3}\,t}$, $dx = \frac{t^2+1}{2\sqrt{3}\,t^2}$ dt καὶ ἔχομεν

$$\int \sqrt{1+3x^2}\,dx = \int\left(t-\sqrt{3}\,\frac{t^2-1}{2\sqrt{3}\,t}\right)\frac{t^2+1}{2\sqrt{3}\,t^2}dt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}dt = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{8\sqrt{3}}t^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\log t - \frac{1}{8\sqrt{3}}t^{-2} + c =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{(x\sqrt{3}+\sqrt{1+3x^2})^2}{2} + 2\log(x\sqrt{3}+\sqrt{1+3x^2}) - \frac{1}{2(x\sqrt{3}+\sqrt{1+3x^2})}\right] + c.$$

*Σημείωσις*. Διὰ καταλλήλου μετασχηματισμοῦ ὁ τύπος $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,dx$ ἀνάγεται εἰς ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$.

**Ε. Ὁλοκληρώματα μὲ τύπον: $\int R(x, \sqrt{\alpha x+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})\, dx$**
**(ὅπου R ρητὴ συνάρτησις τῶν x, $\sqrt{\alpha x+\beta}$, $\sqrt{\gamma x+\delta}$).**

Ταῦτα ὁλοκληροῦνται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\sqrt{\alpha x+\beta} = t \Rightarrow \alpha x+\beta = t^2$, $\alpha dx = 2tdt$, ὁπότε ἀνάγονται εἰς ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου

$$\int R\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}, t, \sqrt{\gamma\frac{t^2-\beta}{\alpha}+\delta}\right)\frac{2t}{\alpha}\, dt.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\, dx$ β) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

**Ἀπάντησις.** α) Θέτομεν $\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x+1=t^2$, $dx=2tdt$ καὶ $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{t^2-1+\sqrt{t^2-2}}{t}\, 2tdt = 2\int (t^2-1+\sqrt{t^2-2})dt$. Θέτομεν ἐν συνεχείᾳ $\sqrt{t^2-2} = t-\varphi \Rightarrow dt = \dfrac{2(\varphi^2-2)}{4\varphi^2}d\varphi \iff dt = \dfrac{\varphi^2-2}{2\varphi^2}d\varphi$ καὶ ἔχομεν $\displaystyle 2\int \frac{\varphi^4-2\varphi^3+4\varphi^2+4}{4\varphi^2}\cdot\frac{\varphi^2-2}{2\varphi^2}d\varphi = \frac{1}{4}\int\left(\varphi^2-2\varphi-2+\frac{4}{\varphi}-\frac{4}{\varphi^2}-\frac{8}{\varphi^4}\right)d\varphi = \frac{1}{12}\varphi^3-\frac{\varphi^2}{4}+\frac{\varphi}{2}+$
$\displaystyle +\log|\varphi|-\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}-\frac{2}{3}\frac{1}{\varphi^3}+c = \frac{1}{12}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^3-\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}-$
$\displaystyle -\sqrt{x-1})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})+\log|\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}|-$

$$-\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+\frac{1}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^3}+c.$$

β) Θέτομεν $\sqrt{x+2} = t \Rightarrow x+2 = t^2$, $dx = 2tdt$, $x+1 = t^2-1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{t^2-1}$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται: $\displaystyle\int \frac{(t^2-2)}{t+\sqrt{t^2-1}}\cdot 2tdt = 2\int\frac{t^3-2t}{t+\sqrt{t^2-1}}dt$, ἐὰν καὶ πάλιν θέσωμεν $\sqrt{t^2-1} = t-\varphi \Rightarrow t^2-1 = t^2-2t\varphi+\varphi^2 \Rightarrow t = \dfrac{1+\varphi^2}{2\varphi}$, $dt = \dfrac{\varphi^2-1}{2\varphi^2}d\varphi$ καὶ ἔχομεν μετὰ τὰς πράξεις: $\displaystyle -\frac{1}{8}\int\frac{(\varphi^4-6\varphi^2+1)(1+\varphi^2)}{\varphi^4}d\varphi = -\frac{1}{8}\int\frac{\varphi^6-5\varphi^4-5\varphi^2+1}{\varphi^4}d\varphi$
$\displaystyle = -\frac{1}{8}\int\varphi^2 d\varphi+\frac{5}{8}\int d\varphi+\frac{5}{8}\int\varphi^{-2}d\varphi-\frac{1}{8}\int\varphi^{-4}d\varphi = -\frac{1}{24}\varphi^3+\frac{5}{8}\varphi-$
$\displaystyle -\frac{5}{8}\varphi^{-1}+\frac{1}{24}\varphi^{-3}+c = -\frac{1}{24}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})^3+\frac{5}{8}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})-$

$$-\frac{5}{8}\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}+\frac{1}{24}\frac{1}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})^3}+c.$$

**ΣΤ. Ὁλοκληρώματα μὲ τύπον: $\int R(e^{\alpha x})dx$**
**(ὅπου R ρητὴ συνάρτησις τοῦ $e^{\alpha x}$).**

Ταῦτα ὑπολογίζονται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $e^{\alpha x} = t \Rightarrow \alpha x = \log t$,

$\alpha dx = \frac{1}{t} dt$, ὁπότε $\int R(e^{\alpha x})dx = \int R(t) \frac{1}{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} \int f(t)dt$ μὲ f(t) ρητὴ συνάρτησις τοῦ t.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Μὲ τί ἰσοῦνται τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+6e^{2x}+10}} dx$ β) $\sqrt{e^x-1}\, dx$

**᾿Απάντησις.** α) Θέτομεν $e^{2x}=t \Rightarrow 2x=\log t$, $2dx = \frac{1}{t} dt$ καὶ $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+6e^{2x}+10}}dx =$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{t^2+6t+10}} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t^2+6t+10}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(t+3)^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \log\left[(t+3) + \sqrt{(t+3)^2+1}\right] + c = \frac{1}{2} \log\left[e^{2x}+3 + \sqrt{(e^{2x}+3)^2+1}\right] + c.$$

β) Θέτομεν $e^x = t \Rightarrow x = \log t$, $dx = \frac{1}{t} dt$ καὶ $\int \sqrt{e^x-1}\, dx = \int \sqrt{t-1}\, \frac{1}{t} dt$ θέτομεν ἐν συνεχείᾳ $\sqrt{t-1} = \varphi > 0$, ὁπότε $t - 1 = \varphi^2$, $dt = 2\varphi d\varphi$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\int \sqrt{t-1}\, \frac{1}{t} dt = \int \varphi \frac{1}{1+\varphi^2} 2\varphi d\varphi = 2\int \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} d\varphi = 2\int \frac{\varphi^2+1-1}{\varphi^2+1} d\varphi =$$

$$= 2\varphi - 2\tau o\xi_0 \varepsilon\varphi\varphi + c = 2\sqrt{e^x-1} - 2\tau o\xi_0 \varepsilon\varphi\sqrt{e^x-1} + c.$$

## Ζ. ῾Ολοκληρώματα τῆς μορφῆς:

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[k_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \ldots, \sqrt[k_\rho]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx.$$

῞Οπου R ρητὴ συνάρτησις τῶν x, $\sqrt[k_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[k_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \ldots, \sqrt[k_\rho]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ καὶ $k_1, k_2, \ldots, k_\rho \in N$.

Τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς αὐτῆς ὑπολογίζονται διὰ τῆς ἀντικατάστάσεως $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = t$, ὅπου ν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ β) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}} dx$

**᾿Απάντησις.** α) ᾿Εδῶ ε.κ.π. τῶν $k_1, k_2$ εἶναι τὸ 6. Θέτομεν λοιπὸν $\sqrt[6]{x} = t \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$ καὶ λαμβάνομεν $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1+t^3}{1+t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8+t^5}{t^2+1} dt =$

$$= 6\int\left(t^6-t^4+t^3+t^2-t-1+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt = 6\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+6\frac{t^4}{4}+6\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}-$$

$$-6t+6\int\frac{t+1}{t^2+1}dt = \frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3-3t^2-6t+3\int\frac{2t+1+1}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3-3t^2-6t+3\log(t^2+1)+3\text{τοξ}_0\text{εφ}t = \frac{6}{7}(\sqrt[6]{x})^7-$$

$$-\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x})^5+\frac{3}{2}(\sqrt[6]{x})^4+2(\sqrt[6]{x})^3-3(\sqrt[6]{x})^2-6(\sqrt[6]{x})+3\log(\sqrt[6]{x^2}+1)+3\text{τοξ}_0\text{εφ}\sqrt[6]{x}.$$

β) Εἶναι ε.κ.π. τῶν $k_1$, $k_2$ τὸ 6. Θέτομεν λοιπὸν $\sqrt[6]{1+x} = t \Rightarrow 1+x = t^6$, $dx = 6t^5dt$ καὶ $\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx = 6\int\frac{t^8dt}{1+t^2} = 6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+$

$$+2t^3-6t+6\text{τοξ}_0\text{εφ}t+c = 6\,\frac{x-6}{7}\sqrt[6]{x+1}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+6\text{τοξ}_0\text{εφ}\sqrt[6]{x+1}+c.$$

## Η. Ὁλοκληρώματα μὲ τύπον: $\int x^k(\alpha x^\lambda+\beta)^\mu dx$

**(ὅπου $k, \lambda, \mu \in Q$ καὶ $\alpha, \beta \in R$)**

Τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς αὐτῆς ὀνομάζονται δυωνυμικὰ καὶ ὑπολογίζονται μόνον ὅταν οἱ ρητοὶ k, λ, μ πληροῦν μίαν τῶν κάτωθι σχέσεων:

i) $\mu \in Z$, ii) $\frac{k+1}{\lambda} \in Z$, iii) $\left(\frac{k+1}{\lambda}+\mu\right) \in Z$.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς δυωνύμου ὁλοκληρώματος θέτομεν

$$x = t^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow x^\lambda = t,\quad \lambda x^{\lambda-1}dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{\lambda}t^{\frac{1}{\lambda}-1}dt.$$

Μετὰ ταῦτα γράφοντες τὰς δυνάμεις ὡς ριζικὰ καὶ ἐξάγοντες ἐκτὸς αὐτῶν τοὺς ὑπάρχοντας παράγοντας, καταλήγομεν εἰς ὁλοκληρώματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ τὰ γνωστά.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$ β) $\int\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}$ γ) $\int x^{-2}(1+x^3)^{\frac{1}{3}}dx$

Ἀπάντησις. α) Εἶναι $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^1}$ καὶ ἐπειδὴ $\mu = 1$ ὑπολογίζεται. Θέτομεν

$x^{\frac{1}{3}} = t \Rightarrow x = t^3$, $dx = 3t^2dt$ καὶ ἔχομεν $\int\frac{3t^2dt}{t^{\frac{3}{2}}(1+t)} = 3\int t^{2-\frac{3}{2}}\frac{1}{1+t}dt =$

$= 3\int \frac{t^{\frac{1}{2}}dt}{t+1} = 3\int \sqrt{t}\,\frac{dt}{1+t}$ καὶ μὲ $\sqrt{t} = \varphi > 0,\ t = \varphi^2 \Rightarrow dt = 2\varphi d\varphi$ λαμβάνομεν

$$3\int \varphi\,\frac{2\varphi d\varphi}{1+\varphi^2} = 6\int \frac{\varphi^2 d\varphi}{1+\varphi^2} = 6\int d\varphi - 6\int \frac{d\varphi}{1+\varphi^2} = 6\varphi - 6\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\varphi + c =$$

$$= 6\sqrt{t} - 6\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\sqrt{t} + c = 6\sqrt[6]{x} - 6\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt[6]{x} + c.$$

β) Εἶναι $\int x^{-\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx$ καὶ ἐπειδὴ $k = -\frac{1}{3},\ \lambda = \frac{1}{3}$ μὲ $\frac{k+1}{\lambda} = 4$ ὑπολογίζεται. Θέτομεν $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3,\ dx = 3t^2 dt$, ὁπότε $\int x^{-\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$

$= \int t(1+t)^{-\frac{1}{2}}\, 3t^2 dt = 3\int t^3(1+t)^{-\frac{1}{2}} dt = 3\int \frac{t^3 dt}{\sqrt{1+t}}$ καὶ μὲ $\sqrt{1+t} = \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow dt = 2\varphi d\varphi$ λαμβάνομεν $3\int \frac{(\varphi^2-1)^3 2\varphi d\varphi}{\varphi} = 6\int(\varphi^6 - 3\varphi^4 + 3\varphi^2 - 1)d\varphi = 6\,\frac{\varphi^7}{7} -$

$$-\frac{18}{5}\varphi^5 + \frac{18}{3}\varphi^3 - 6\varphi + c = \frac{6\left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}\right)^7}{7} - 18\,\frac{\left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}\right)^5}{5} - 6\left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}\right) + c.$$

γ) Εἶναι $k = -2,\ \lambda = 3,\ \mu = \frac{1}{3}$ καὶ $\frac{k+1}{\lambda} + \mu = 0$ ἄρα ὑπολογίζεται. Θέτομεν $x^3 = t,\ 3x^2 dx = dt$ καὶ ἔχομεν:

$$\int \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}} dt}{3t\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}}\,dt \text{ καὶ μὲ } \sqrt[3]{1+\frac{1}{t}} = \varphi,\ dt = -\frac{3\varphi^2}{(\varphi^3-1)^2}\,d\varphi$$

λαμβάνομεν $\frac{1}{3}\int(\varphi^3-1)\varphi\,\frac{-3\varphi^2}{(\varphi^3-1)^2}\,d\varphi = -\int \frac{\varphi^3(\varphi^3-1)}{(\varphi^3-1)^2}\,d\varphi = -\int \frac{\varphi^3 d\varphi}{\varphi^3-1} = -$

$$-\int d\varphi - \int \frac{d\varphi}{\varphi^3-1} = -\varphi - \int \frac{d\varphi}{(\varphi-1)(\varphi^2+\varphi+1)}.$$

Τὸ τελευταῖον ὁλοκλήρωμα ὑπολογίζεται εὐκόλως.

## Θ. Ὁλοκληρώματα μὲ τύπον: $\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$ (ὅπου R ρητὴ συνάρτησις τῶν ημx, συνx)

Ταῦτα ὑπολογίζονται κατὰ τὴν ἀκόλουθον πορείαν:

α) Ἐὰν ἡ R εἶναι περιττὴ ὡς πρὸς ημx, θέτομεν συνx = t

β) Ἐὰν ἡ R εἶναι περιττὴ ὡς πρὸς συνx, θέτομεν ημx = t

γ) Ἐὰν ἡ R ἀρτία ὡς πρὸς ημx, συνx, θέτομεν ἐφx = t

δ) Ἐὰν οὐδὲν τῶν ἀνωτέρω συμβαίνῃ, θέτομεν $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = t$.

Μὲ τὰς ὡς ἄνω ἀντικαταστάσεις ἡ R ἀνάγεται εἰς ρητὴν συνάρτησιν τοῦ t καὶ ὑπολογίζεται εὐκόλως.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}}dx$ β) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x}$ γ) $\int \frac{dx}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$

**Ἀπάντησις.** α) Τὸ $\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}}dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}}dx$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι περιττὴ ὡς πρὸς ημx θέτομεν συνx = t ⇒ —ημxdx = dt ἄρα $\int \frac{\eta\mu x dx}{\sqrt{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{2t^2-1}} =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(t+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}\right)+c =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x-{}^1/_2})+c.$$

β) Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι περιττὴ ὡς πρὸς ημx, συνx θέτομεν ημx = t ἢ συνx = t, ὁπότε μὲ ημx = t ⇒ συνxdx = dt καὶ ἔχομεν:

$$\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x} = \int \frac{dt}{(1-\eta\mu^2 x)^2 t} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2 t} = \int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2 t} = \int \frac{A}{t}dt +$$

$$+\int \frac{B_1}{(1-t)}dt + \int \frac{B_2}{(1-t)^2}dt + \int \frac{\Gamma_1}{1+t}dt + \int \frac{\Gamma_2}{(1+t)^2}dt,$$ ὅπου τὰ $A, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ ὑπολογίζονται ἐκ τῆς ταυτότητος:

$$\frac{1}{t(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{t}+\frac{B_1}{1-t}+\frac{B_2}{(1-t)^2}+\frac{\Gamma_1}{(1+t)}+\frac{\Gamma_2}{(1+t)^2}$$

γ) Θέτομεν $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\eta\mu x = \frac{2t}{1+t^2}$ καὶ ἔχομεν

$$\int \frac{dx}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \log(t+1)+c = \log\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+1\right)+c.$$

## I. Ὁλοκληρώματα μὲ τύπον:

$$\int \sqrt{1\pm\eta\mu kx}, \qquad \int \sqrt{1\pm\sigma\upsilon\nu kx}, \quad k\epsilon R.$$

Ἅπαντα ὑπολογίζονται δι' ἀναλύσεως εἰς γινόμενον τοῦ ὑπορρίζου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \sqrt{1-\eta\mu 3x}\,dx$ β) $\int \sqrt{2+2\sigma\upsilon\nu x}\,dx$

**Ἀπάντησις.** α) Εἶναι $\int \sqrt{1-\eta\mu 3x}\,dx = \int \sqrt{2\eta\mu^2\left(45^0-\frac{3x}{2}\right)}\,dx =$

$$= \sqrt{2}\int \eta\mu\left(45^0-\frac{3x}{2}\right)dx = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\int \eta\mu\left(45^0-\frac{3x}{2}\right)d\left(45^0-\frac{3x}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sigma\upsilon\nu\left(45^0-\frac{3x}{2}\right)+c.$$

β) Εἶναι $\int \sqrt{2(1+\text{συν}x)}\,dx = \sqrt{2}\int \sqrt{2\text{συν}^2\frac{x}{2}}\,dx = 2\int \text{συν}\frac{x}{2}\,dx =$

$$= 4\int \text{συν}\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2} = 4\text{ημ}\frac{x}{2} + c.$$

**Κ. Ὁλοκληρώματα μὲ τύπους:**

**1)** $\int f(x)\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\,dx$ **2)** $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$ **3)** $\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

**4)** $\int f(x)\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}\,dx$ **5)** $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}}$ **6)** $\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}}$

**7)** $\int f(x)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}\,dx$ **8)** $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$ **9)** $\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\beta^2x^2+\alpha^2}}$

Αἱ μορφαὶ (1), (2), (3), (4), (5), (6) ὁλοκληρώνονται, ἐὰν θέσωμεν ὅπου ρίζα $\sqrt{\ }$ τὸ $t - \beta x$.

Αἱ δὲ μορφαὶ (7), (8), (9) ὁλοκληρώνονται ἐὰν θέσωμεν ὅπου $x = \frac{\alpha}{\beta}\text{ημ}t$. Εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις τὰ ὁλοκληρώματα τῶν τύπων (1), (2), (3) ἐπιλύονται ἐὰν θέσωμεν $x = \frac{\alpha}{\beta}\text{εφ}t$, τὰ δὲ ὁλοκληρώματα (4), (5), (6) ἐὰν θέσωμεν $x = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\text{ημ}t}$.

Τὰ δὲ τῶν τύπων (8), (9) ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ἡ f(x) ἐπιλύονται, ἐὰν θέσωμεν $x = \frac{\alpha}{\beta}t$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \sqrt{1+x^2}dx$ β) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ γ) $\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}dx$

δ) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{k^2+x^2}}$ ε) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$ στ) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

**Ἀπάντησις. α)** Θέτομεν $\sqrt{1+x^2} = t - x \Rightarrow 1+x^2 = t^2-2tx+x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$,

$dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$ καὶ $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int t\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \frac{1}{4}\int \frac{t^4+2t^2+1}{t^3}dt =$

$$= \frac{1}{4}\int t dt + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\log t - \frac{1}{8}t^{-2} + c =$$

$$= \frac{1}{8}(x+\sqrt{1+x^2})^2 + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{8}(x+\sqrt{1+x^2})^{-2} + c.$$

β) Θέτομεν $x = 2\eta\mu t$, $dx = 2\sigma\upsilon\nu t dt$ καὶ ἔχομεν $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{4-4\eta\mu^2 t}}{2\eta\mu t}$.

$$2\sigma\upsilon\nu t dt = 2\int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 t}{\eta\mu t} dt = 2\int \frac{(1-\eta\mu^2 t)}{\eta\mu t} dt = 2\int \frac{dt}{\eta\mu t} - 2\int \eta\mu t dt = 2\log\varepsilon\varphi \frac{t}{2} +$$

$$+2\sigma\upsilon\nu t + c = 2\log\varepsilon\varphi \frac{\tau o\xi_0 \eta\mu \frac{x}{2}}{2} + \sqrt{4-x^2} + c.$$

γ) Θέτομεν $x = \alpha\eta\mu t$, $dx = \alpha\sigma\upsilon\nu t dt$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\int \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{\alpha^2-\alpha^2\eta\mu^2 t}}{\alpha\eta\mu t} \alpha\sigma\upsilon\nu t dt = \alpha\int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 t}{\eta\mu t} dt = \alpha\int \frac{(1-\eta\mu^2 t)}{\eta\mu t} dt =$$

$$= \alpha\int \frac{dt}{\eta\mu t} - \alpha\int \eta\mu t dt = \alpha\log\varepsilon\varphi \frac{t}{2} - \alpha\sigma\upsilon\nu t + c = \alpha\log\varepsilon\varphi \frac{\tau o\xi_0 \eta\mu \frac{x}{2}}{2} + \sqrt{\alpha^2-x^2} + c.$$

δ) Θέτομεν $x = k\varepsilon\varphi t$, $dx = \frac{kdt}{\sigma\upsilon\nu^2 t}$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{k^2+x^2}} = \int \frac{kdt}{k^2\sigma\upsilon\nu^2 t \frac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\sqrt{k^2+k^2\varepsilon\varphi^2 t}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dt}{\varepsilon\eta\mu^2 t\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon k^2}\int \frac{\sigma\upsilon\nu t dt}{\eta\mu^2 t} = \frac{1}{\varepsilon k^2}\int \eta\mu^{-2} t d\eta\mu t = -\frac{1}{\varepsilon k^2}\frac{1}{\eta\mu t} + c = -\frac{1}{\varepsilon k^2}\frac{\sqrt{x^2+k^2}}{x} \quad (\varepsilon=\pm 1).$$

ε) Θέτομεν $\sqrt{x^2-4} = t - x \Rightarrow x = \frac{t^2+4}{2t}$, $dx = \frac{t^2-4}{2t^2} dt$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+4)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4}\int \frac{t^4+8t^2+16}{t^3} dt = \frac{1}{4}\int tdt + 2\int \frac{dt}{t} + 4\int \frac{dt}{t^3} =$$

$$= \frac{t^2}{4} + 2\log t - 2\frac{1}{t^2} = \frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2-4})^2 + 2\log(x+\sqrt{x^2-4}) - \frac{2}{x+\sqrt{x^2-4}}.$$

στ) Θέτομεν $\sqrt{2x^2+3} = t - x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{t^2-3}{2\sqrt{2}t}$, $dx = \frac{t^3+3}{2\sqrt{2}t^2} dt$ καὶ ἔχομεν

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}} = \int \frac{\frac{t^3+3}{2\sqrt{2}t^2}}{\frac{t^3+3}{2\sqrt{2}t}} dt = \int \frac{dt}{t} = \log t + c = \log(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2+3}) + c.$$

## II. ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $f_1$, $f_2$ ὡρισμέναι καὶ παραγωγίσιμοι εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ ἡ συνάρτησις $f'_1(x)f_2(x)$ ἔχει ἀόριστον ὁλοκλήρωμα εἰς τὸ (α, β), τότε καὶ ἡ συνάρτησις $f_1(x)f'_2(x)$ ἔχει ἀόριστον ὁλοκλήρωμα εἰς τὸ (α, β) καὶ ἰσχύει.**

$$\int f_1(x)f'_2(x)dx = f_1(x)f_2(x) - \int f'_1(x)f_2(x)dx \iff \int f_1 df_2 = f_1 f_2 - \int f_1 df_2$$

**'Απόδειξις.** 'Ισχύει $(f_1 \cdot f_2)' = f'_1 f_2 + f_1 f'_2 \Rightarrow f_1(x)f_2(x) = \int f'_1(x)f_2(x)dx +$
$+ \int f_1(x)f'_2(x)dx \Rightarrow \int f_1(x)f'_2(x)dx = f_1(x)f_2(x) - \int f'_1(x)f_2(x)dx.$

Διὰ τῆς παραγοντικῆς μεθόδου ὑπολογίζονται ἅπαντα τὰ ὁλοκληρώματα μὲ τύπους :

1) $\int f(x)\eta\mu(\alpha x+\beta)dx$ 2) $\int f(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx$ 3) $\int f(x)\tau o\xi_0\eta\mu[\sigma(x)]dx$

4) $\int f(x)\tau o\xi_0\varepsilon\varphi[\sigma(x)]dx$ 5) $\int f(x)\tau o\xi_0\sigma\upsilon\nu[\sigma(x)]dx$ 6) $\int e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x+\gamma)dx$

7) $\int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)dx$ 8) $\int f(x)e^{\alpha x}dx$ 9) $\int f(x)\log[\sigma(x)]dx$

10) $\int f(x)e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)dx$ 11) $\int e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x+\gamma)dx$

ὅπου $f(x)$, $\sigma(x)$ ρηταὶ συναρτήσεις τοῦ x.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα :**

α) $\int x^2\sigma\upsilon\nu x dx$ β) $\int x\eta\mu 3x dx$ γ) $\int x^2e^x dx$ δ) $\int x\tau o\xi_0\eta\mu x^2 dx$

ε) $\int x\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x dx$ στ) $\int e^{2x}\eta\mu x dx$ ζ) $\int e^x\sigma\upsilon\nu 3x dx$ η) $\int (x^2-3x+1)e^{2x}dx$

θ) $\int x\log(x+1)dx$ ι) $\int \frac{\log(\log x)dx}{x}$

**'Απάντησις.** α) Εἶναι $\int x^2\sigma\upsilon\nu x dx = \int x^2 d\eta\mu x = x^2\eta\mu x - \int \eta\mu x dx^2 = x^2\eta\mu x -$
$- \int \eta\mu x 2x dx = x^2\eta\mu x - 2\int x d(-\sigma\upsilon\nu x) = x^2\eta\mu x + 2\int x d\sigma\upsilon\nu x = x^2\eta\mu x - 2(x\sigma\upsilon\nu x -$
$- \int \sigma\upsilon\nu x dx) = x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x.$

β) $\int x\eta\mu 3x dx = \frac{1}{3}\int x\eta\mu 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\int x d\sigma\upsilon\nu 3x = -\frac{1}{3}x\sigma\upsilon\nu 3x +$
$+ \frac{1}{3}\int \sigma\upsilon\nu 3x dx = -\frac{1}{3}x\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{1}{9}\int \sigma\upsilon\nu 3x d(3x) = -\frac{1}{3}x\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{1}{9}\eta\mu 3x.$

γ) $\int x^2e^x dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - \int e^x dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2\int x de^x =$
$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x.$

δ) $\int x\tau o\xi_0\eta\mu x^2 dx = \int \tau o\xi_0\eta\mu x^2 d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\tau o\xi_0\eta\mu x - \int \frac{x^2}{2}d(\tau o\xi_0\eta\mu x^2) =$
$= \frac{x^2}{2}\tau o\xi_0\eta\mu x^2 - \frac{1}{2}\int x^2\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{x^2}{2}\tau o\xi_0\eta\mu x^2 - \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

Θέτομεν τώρα $\sqrt{1-x^4} = t \Rightarrow 1-x^4 = t^2 \Rightarrow -4x^3dx = 2tdt \Rightarrow x^3dx = -\frac{1}{2}tdt$

καὶ ἔχομεν : $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t} = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}.$

Άρα $\int x\tau o\xi_0\eta\mu x^2 dx = \frac{x^2}{2}\tau o\xi_0\eta\mu x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + c.$

ε) $\int x\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x dx = \int \tau o\xi_0\varepsilon\varphi x dx = x\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x - \int x d(\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x) = x\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x -$

$$\int x\frac{1}{1+x^2}dx = x\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x - \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2} = x\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

στ) $\int e^{2x}\eta\mu x dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\eta\mu x d2x = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\eta\mu x - \int e^{2x}d\eta\mu x\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x -$

$- \frac{1}{2}\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu x d2x = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x - \frac{1}{4}(e^{2x}\sigma\upsilon\nu x -$

$$- \int e^{2x}d\sigma\upsilon\nu x) = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x - \frac{1}{4}e^{2x}\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\eta\mu x dx.$$

Άρα $\frac{5}{4}\int e^{2x}\eta\mu x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x - \frac{1}{4}e^{2x}\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \int e^{2x}\eta\mu x dx = \frac{2}{5}e^{2x}\eta\mu x -$

$- \frac{1}{10}e^{2x}\sigma\upsilon\nu x + c.$

ζ) $\int e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x dx = \int \sigma\upsilon\nu 3x de^{x} = e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x - \int e^{x}d\sigma\upsilon\nu 3x = e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x -$

$- \int e^{x}(-\eta\mu 3x)3dx = e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x + 3\int \eta\mu 3x de^{x} = e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x + 3e^{x}\eta\mu 3x - 3\int e^{x}d\eta\mu 3x =$

$$= e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x + 3e^{x}\eta\mu 3x - 9\int e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x dx.$$

Άρα $10\int e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x dx = e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x + 3e^{x}\eta\mu 3x \Rightarrow \int e^{x}\sigma\upsilon\nu 3x dx = \frac{e^{x}}{10}(\sigma\upsilon\nu 3x + 3\eta\mu 3x) + c.$

η) $\int (x^2-3x+1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int (x^2-3x+1)e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}\int (x^2-3x+1)de^{2x} =$

$$= \frac{1}{2}(x^2-3x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}d(x^2-3x+1) = \frac{1}{2}(x^2-3x+1)e^{2x} -$$

$- \frac{1}{2}\int (2x-3)e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}(x^2-3x+1) - \frac{1}{4}\int (2x-3)de^{2x} = \frac{e^{2x}}{2}(x^2-3x+1) -$

$- \frac{1}{4}e^{2x}(2x-3) + \frac{1}{4}\int e^{2x}d(2x-3) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2-3x+1) - \frac{1}{4}e^{2x}(2x-3) +$

$+ \frac{1}{4}\int e^{2x}d(2x) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2-3x+1) - \frac{e^{2x}}{4}(2x-3) + \frac{e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}}{2}(x^2-4x+3) + c.$

θ) $\int x\log(x+1)dx = \int \log(x+1)d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \int \frac{x^2}{2}d\log(x+1) =$

$= \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx =$

$= \frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2}\log(x+1) -$

$$- \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(x+1) + c.$$

ι) $\int \frac{\log(\log x)dx}{x} = \int \log(\log x)d(\log x) = \log x\log(\log x) - \int \log x d[\log(\log x)] =$

$= \log x\log(\log x) - \int \log x \frac{(\log x)'}{\log x} dx = \log x\log(\log x) - \int \frac{1}{x} dx = \log x\log(\log x) - \log x + c.$

## 13. 4 Ἀναγωγικοὶ τύποι ὁλοκληρώσεως

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν εἰδικῶν τύπων ὁλοκληρωμάτων κάμνομεν πολλάκις χρῆσιν τῶν κατωτέρω βασικῶν ἀναγωγικῶν τύπων.

**Ἰσχύουν οἱ κάτωθι ἀναγωγικοὶ τύποι :**

1. $I_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx = -\frac{1}{\nu} \eta\mu^{\nu-1}x\, \sigma\upsilon\nu\, x + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2} \quad \forall \nu \in N : \nu \geqq 2$

2. $I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx = \frac{1}{\nu} \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\, \eta\mu\, x + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2} \quad \forall \nu \in N : \nu \geqq 2$

3. $I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x\, dx = \frac{1}{\nu-1} \varepsilon\varphi^{\nu-1}x - I_{\nu-2} \quad \forall \nu \in N : \nu \geqq 2$

4. $I_\nu = \int \sigma\varphi^\nu x\, dx = -\frac{1}{\nu-1} \sigma\varphi^{\nu-1}x - I_{\nu-2} \quad \forall \nu \in N : \nu \geqq 2$

5. $I_\nu = \int \log^\nu x dx = x\log^\nu x - \nu I_{\nu-1} \quad \forall \nu \in N$

6. $I_\nu = \int e^{-x}x^\nu dx = -e^{-x}x^\nu + \nu I_{\nu-1} \quad \forall \nu \in N$

7. $I_\nu = \int (\tau o\xi_0 \eta\mu x)^\nu dx = x(\tau o\xi_0 \eta\mu x)^\nu + \nu \sqrt{1-x^2}(\tau o\xi_0 \eta\mu x)^{\nu-1} - \nu(\nu-1) I_{\nu-2}$

$\forall \nu \in N : \nu \geqq 2.$

**Ἀπόδειξις 1.** Εἶναι κατὰ σειράν: $\int \eta\mu^\nu x = \int \eta\mu^{\nu-1} x\, \eta\mu\, x\, dx =$

$= -\int \eta\mu^{\nu-1}x d(\sigma\upsilon\nu\, x) = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + \int \sigma\upsilon\nu x d(\eta\mu^{\nu-1}x) =$

$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + \int (\nu-1)\sigma\upsilon\nu x\eta\mu^{\nu-2} x\sigma\upsilon\nu x dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x +$

$+ (\nu-1) \int \sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^{\nu-2}x dx = -\eta\mu^{\nu-1} x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1) \int (1-\eta\mu^2 x)\eta\mu^{\nu-2}x dx =$

$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1) \int \eta\mu^{\nu-2} x dx - (\nu-1) \int \eta\mu^\nu x\, dx.$

Ἐπομένως: $$\int \eta\mu^{\nu}x dx = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \eta\mu^{\nu-2}x dx \quad (i)$$

*Σημείωσις.* Δι' ἀρνητικοὺς ἐκθέτας μὲ $\nu - 2 \neq -1$ λαμβάνομεν τὸν τύπον: $$\int \eta\mu^{\nu-2}x dx = \frac{\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x}{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu-1}\int \eta\mu^{\nu}x dx.$$

**2.** Εἶναι $$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu x dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x d(\eta\mu x) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x - \int \eta\mu x d(\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x) = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x + \int (\nu-1)\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\eta\mu x dx =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x + (\nu-1)\int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu\,x +$$

$$+ (\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx - (\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx.$$

Ἐπομένως: $$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx.$$

*Σημείωσις.* Δι' ἀρνητικοὺς ἐκθέτας μὲ $\nu - 2 \neq -1$ ἰσχύει ὁ τύπος

$$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x}{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu-1}\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx$$

**3.** Εἶναι $$\int \varepsilon\varphi^{\nu}x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\varepsilon\varphi^2 x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-2}x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x d(\varepsilon\varphi x) - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x dx =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x dx$$

Ἐπομένως: $$\int \varepsilon\varphi^{\nu}x dx = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x dx \quad \forall \nu \in N : \nu \geq 2.$$

**4.** Εἶναι $$\int \sigma\varphi^{\nu}x dx = \int \sigma\varphi^{\nu-2}x\frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}dx = \int \sigma\varphi^{\nu-2}x\frac{dx}{\eta\mu^2 x} -$$

$$- \int \sigma\varphi^{\nu-2}x dx = -\int \sigma\varphi^{\nu-2}x d(\sigma\varphi x) - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x dx = -\frac{\sigma\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x dx.$$

Ἐπομένως: $$\int \sigma\varphi^{\nu}x dx = -\frac{\sigma\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x dx \quad \forall \nu \in N : \nu \geq 2.$$

**5.** Εἶναι $\int \log^\nu x dx = x\log^\nu x - \int x d(\log^\nu x) = x\log^\nu x - \int x\nu\log^{\nu-1}x \frac{1}{x} dx =$

$= x\cdot\log^\nu x - \nu\int \log^{\nu-1}x dx.$

Ἑπομένως : $\int \log^\nu x dx = x\cdot\log^\nu x - \nu \int \log^{\nu-1}x dx \ \forall \nu \in N$

**6.** Εἶναι $\int e^{-x}x^\nu dx = -\int x^\nu d(e^{-x}) = -x^\nu e^{-x} + \int e^{-x}d(x^\nu) = -x^\nu e^{-x} +$

$+ \int e^{-x}.\nu x^{\nu-1}dx = -x^\nu e^{-x} + \nu \int e^{-x}x^{\nu-1}dx.$

Ἑπομένως : $\int e^{-x}x^\nu dx = -x^\nu e^{-x} + \nu \int e^{-x}x^{\nu-1}dx \ \forall \nu \in N.$

**7.** Εἶναι $\int (\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu dx = x(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu - \int x d(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu =$

$$= x(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu - \int x\nu(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu +$$

$$+ \nu \int (\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-1}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu + \nu(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-1}\sqrt{1-x^2} -$$

$$-\nu\int \sqrt{1-x^2}\,(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-2}\frac{\nu-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu + \nu(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-1}\sqrt{1-x^2} -$$

$$-(\nu-1)\nu\int (\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-2}dx.$$

Ἑπομένως : $\int (\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu dx = x(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^\nu + \nu(\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-1}\sqrt{1-x^2} -$

$- \nu(\nu-1)\int (\text{τοξ}_0\text{ημ}x)^{\nu-2}dx.$

## 13. 5 Ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

**Ὁρισμὸς 1.** *Καλοῦμεν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς συνεχοῦς καὶ παραγωγισίμου συναρτήσεως* $f_1$ *ἀπὸ* $\alpha$ *ἕως* $\beta$ *ἢ μὲ ἄκρα τὰ* $\alpha$ *καὶ* $\beta$ *καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ* $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ *τὴν διαφορὰν* $f_1(\beta)-f_1(\alpha)$ *ὅπου* $f_1$ *μία παράγουσα τῆς* $f$ *εἰς τὸ* $[\alpha,\beta]$.

*Ἔχομεν συνεπῶς ἐξ ὁρισμοῦ :* $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha)$.

Ἡ σταθερὰ διαφορὰ $f_1(\beta) - f_1(\alpha)$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐκλογῆς τῆς παραγούσης καὶ τοῦτο διότι κάθε ἄλλη παράγουσα $f_2$ τῆς f δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως $f_2(x) = f_1(x)+c$, ἑπομένως τότε:

$$f_2(\beta)-f_2(\alpha) = f_1(\beta)+c-f_1(\alpha)-c = f_1(\beta)-f_1(\alpha).$$

**Παρατήρησις 1.** Πολλάκις γράφομεν:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha) = [f_1(x)]_\alpha^\beta = f_1(x)\Big|_\alpha^\beta$$

**Παρατήρησις 2.** Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς f(x) καὶ ἀπὸ τὰ ἄκρα ὁλοκληρώσεως καὶ ὄχι ἐκ τῆς μεταβλητῆς x, δηλ. εἶναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$.

**Παρατήρησις 3.** Ἡ συνθήκη συνεχείας τῆς f εἶναι ἱκανή, ὄχι ὅμως καὶ ἀναγκαία διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Ἡ θεωρία τῆς ὁλοκληρώσεως στηρίζεται ἐπὶ τῶν κάτωθι προτάσεων:

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.** **Ἰσχύει** $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$.

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω $f_1(x)$ μία παράγουσα τῆς f(x), τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx = [f_1(x)]_\alpha^\alpha = f_1(\alpha) - f_1(\alpha) = 0.$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.** **Ἐὰν ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ [α, β] ἰσχύει:**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx \iff \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\alpha f(x)dx = 0 = \int_\alpha^\alpha f(x)dx$$

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω $f_1$ μία παράγουσα τῆς f, τότε ἔχομεν:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha) \text{ καὶ } \int_\beta^\alpha f(x)dx = f_1(\alpha) - f_1(\beta) = -[f_1(\beta) - f_1(\alpha)].$$

Ἄρα τὸ ἀποδεικτέον.

**Παρατήρησις.** Τὸ σύμβολον $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ἔχει ἔννοιαν καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις: i) $\alpha < \beta$, ii) $\alpha = \beta$, ii) $\alpha > \beta$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. Ἐὰν ἡ f συνεχὴς εἰς τὸ [α, β] καὶ k σταθερὰ ἰσχύει:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} kf(x)dx = k\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

**Ἀπόδειξις.** Ἔστω $f_1$ μία παράγουσα τῆς f, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow k\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = k[f_1(\beta) - f_1(\alpha)]$. Ἀλλὰ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} kf(x)dx = k[f_1(\beta) - f_1(\alpha)]$. Ἄρα τὸ ζητούμενον.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1, f_2$ εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ [α, β], τότε ἰσχύει:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx$$

**Ἀπόδειξις.** Ἔστωσαν f καὶ φ δύο παράγουσαι τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ ἀντιστοίχως. Τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$ καὶ $\int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

Ἄρα: $$\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx = f(\beta) - f(\alpha) + \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἔχομεν $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f_1(x)+f_2(x)]dx = \Big[f(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} + \Big[\varphi(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} = f(\beta) - f(\alpha) + \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \qquad (2)$$

Γενικώτερον αἱ προτάσεις (3), (4) δίδουν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\xi_1 f_1(x) + \xi_2 f_2(x) + \ldots + \xi_\nu f_\nu(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} \xi_1 f_1(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} \xi_2 f_2(x)dx + \ldots +$$

$+ \int_{\alpha}^{\beta} \xi_k f_k(x)dx$, ὅπου $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ σταθεραὶ πεπερασμένου πλήθους.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. Ἐὰν f(x) συνεχὴς εἰς τὸ [α, β] καὶ ξ∈(α, β), τότε ἰσχύει:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{\beta} f(x)dx$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ f(x) συνεχὴς εἰς τὸ [α, β], ὑπάρχει τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα αὐτῆς καὶ ἔστω $\int f(x)dx = f_1(x)$, ὅπου $f_1(x)$ μία παράγουσα τῆς f.

Τότε θὰ ἔχωμεν: $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha) \quad (1),$$

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx = f_1(\xi) - f_1(\alpha) \quad (2), \qquad \int_{\xi}^{\beta} f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\xi) \quad (3)$$

Ἄρα: $$\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{\beta} f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. Ἐὰν f(x) συνεχὴς εἰς τὸ [α, β], τότε ὑπάρχει ξ∈(α, β) τοιοῦτον ὥστε:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ f συνεχὴς εἰς τὸ [α, β], θὰ ὑπάρχῃ ἡ παράγουσα ἔστω $f_1(x)$ αὐτῆς $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Ἀπὸ τὴν Πρότασιν 12.16 διὰ τὴν $f_1(x)$ συνάγεται ὅτι ὑπάρχει ξ∈(α, β) τοιοῦτον, ὥστε $f_1(\beta) - f_1(\alpha) = f'_1(\xi)(\beta - \alpha)$. Ἀλλὰ $f'_1(x) = f(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ καὶ ἑπομένως $f_1(\beta) - f_1(\alpha) = f(\xi)(\beta - \alpha)$. Ἄρα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. Ἐὰν f(x) ≧ 0 καὶ συνεχὴς $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε ἰσχύει:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geqq 0 \quad (\alpha < \beta)$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐκ τῆς προτάσεως (6) ἔχομεν ὅτι ὑπάρχει ξ∈(α, β) τοιοῦτον, ὥστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$ καὶ ἐπειδὴ $f(\xi) \geqq 0$ $\forall \xi \in (\alpha, \beta)$ καὶ $\beta - \alpha > 0$ εἶναι: $f(\xi)(\beta - \alpha) \geqq 0$. Ἄρα: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geqq 0$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. Ἐὰν $f_1$, $f_2$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις εἰς τὸ [α, β] καὶ $f_1(x) \geqq f_2(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε ἰσχύει:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx \geqq \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx \qquad (1)$$

**'Απόδειξις.** 'Η (1) $\iff \int_{\alpha}^{\beta} [f_1(x)—f_2(x)]dx \geqq 0 \iff \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geqq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, ὅπου $f(x) = f_1(x) — f_2(x)$, ἡ ὁποία καὶ ἰσχύει βάσει τῆς προτάσεως (7).

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. 'Εὰν f συνεχὴς ἐν [α, β], γ τυχὸν ἀλλὰ ὡρισμένον σημεῖον τοῦ [α, β] καὶ x μεταβλητὴ τοῦ [α, β], τότε ἰσχύει:**

$$\int f(x)dx = \int_{\gamma}^{x} f(\theta)d\theta$$

**'Απόδειξις.** Ἔστω $f_1(x)$ μία παράγουσα τῆς f(x), τότε εἶναι:

$$\int f(x)dx = f_1(x)+c \quad \text{καὶ} \quad \int_{\gamma}^{x} f(\theta)d\theta = f_1(x)—f_1(\gamma) = f_1(x)+c.$$

Ἄρα: $\int f(x)dx = \int_{\gamma}^{x} f(\theta)d\theta.$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. 'Εὰν ἡ f(x), σ(x) καὶ ἡ παράγωγος σ'(x) εἶναι συνεχεῖς ἐν [α, β], εἶναι δὲ $\sigma([\alpha, \beta]) \subseteq [\alpha, \beta]$, τότε ἰσχύει:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\sigma(x)]\sigma'(x)dx = \int_{\sigma(\alpha)}^{\sigma(\beta)} f(\theta)d\theta$$

**'Απόδειξις.** 'Εὰν $f_1(x)$ εἶναι μία παράγουσα τῆς f(x) θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\sigma(x)]\sigma'(x)dx = \Big[\int f(\sigma(x))\sigma'(x)dx\Big]_{\alpha}^{\beta} = \Big[\int f(\sigma(x))\,d\sigma(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= \Big[\int f(\theta)d\theta \mid \theta = \sigma(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} = \Big[f_1(\theta) \mid \theta = \sigma(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} = \Big[f_1(\sigma(x))\Big]_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= f_1(\sigma(\beta))—f_1(\sigma(\alpha)) = \int_{\sigma(\alpha)}^{\sigma(\beta)} f(\theta)d\theta$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:

α) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \frac{|x(x—1)|}{x^2—1} dx$ β) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x—\eta\mu x|\, dx$ γ) $\int_{0}^{\log 2} \sqrt{e^x—1}\, dx$

'Απάντησις. α) Εἶναι $x(x—1) \geqq 0 \iff x \geqq 1$ ἢ $x \leqq 0$ καὶ $x(x—1) \leqq 0 \iff 0 \leqq x \leqq 1$.

Ἄρα μὲ $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ ἔχομεν $\frac{|x(x-1)|}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$ καὶ μὲ $0 \leq x \leq \frac{4}{5}$ ἔχομεν $\frac{|x(x-1)|}{x^2-1} = -\frac{x(x-1)}{x^2-1} = -\frac{x}{x+1}$.

Ὁπότε $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \frac{|x(x-1)|}{x^2-1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x}{x+1} dx + \int_{0}^{\frac{4}{5}} -\frac{x}{x+1} dx =$

$$= \Big[x - \log(x+1)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \Big[x - \log(x+1)\Big]_{0}^{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{10} + \log\frac{9}{10}$$

β) Εἶναι $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ημx≦x καὶ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ημx≧x.

Ἑπομένως: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x - \eta\mu x|\, dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (x - \eta\mu x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x - \eta\mu x)dx =$

$$= -\left[\frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\sigma\upsilon\nu 0 - \frac{\pi^2}{8} - \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$

$$+ \left[\frac{\pi^2}{8} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu 0\right] = -1 + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} - 1 = -2 + \frac{\pi^2}{4}$$

γ) Θέτομεν $\sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x - 1 = t^2, e^x dx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{2t}{1+t^2} dt.$

Διὰ $x = 0 \Rightarrow t = 0$ καὶ διὰ $x = \log 2 \Rightarrow t = 1$.

Ὁπότε ἔχομεν: $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 t \frac{2t}{1+t^2} dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt =$

$$= 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2\Big[t - \tau o\xi_0 \varepsilon\varphi t\Big]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

**Ὁρισμὸς 2.** *(Κατὰ Riemann).* *Ἔστω $f(x)$ μία συνάρτησις ὡρισμένη καὶ φραγμένη στὸ $[\alpha, \beta]$. Διαιροῦμεν τὸ $[\alpha, \beta]$ διὰ τῶν σημείων $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ εἰς τὰ ν διαστήματα $[\alpha = x_0, x_1]$, $[x_{1-1}, x_2], \ldots, [x_{\nu-1}, x_\nu = \beta]$.*

*Εἰς ἕκαστον ὑποδιάστημα λαμβάνομεν σημεῖον $\xi_k$ καὶ σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα:*

$$(x_1 - x_0) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (x_\nu - x_{\nu-1}) f(\xi_\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}).$$

*Ἐὰν διὰ κάθε τέτοια ὑποδιαίρεση τοῦ $[\alpha, \beta]$ καὶ διὰ κάθε ἐκλογὴ τῶν σημείων $\xi_k$ τὸ ὅριον τοῦ $\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$ ἰσοῦται μὲ θ, ὅταν τὸ $x_k - x_{k-1} \to 0$ τότε ὁ ἀριθμὸς θ λέγεται ὡρισμένο ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x)$ ἀπὸ α ἕως β καὶ συμβολίζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.*

*Ὥστε ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ:* $\lim\limits_{\substack{\nu\to+\infty \\ x_k-x_{k-1}\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = \theta = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\int_\alpha^\beta e^x dx$ κατὰ Riemann ($\alpha<\beta$).**

**Ἀπάντησις.** Ἡ $e^x$ εἶναι συνεχὴς $\forall x\in R$ καὶ ἄρα ὁλοκληρώσιμος εἰς κάθε κλειστὸ διάστημα $[\alpha, \beta]$. Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν τὸ $[\alpha, \beta]$ εἰς ἰσόπλατα διαστήματα πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς $x_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\nu}$, $x_2 = \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{\nu}, \ldots, x_{\nu-1} = \alpha + \frac{(\nu-1)(\beta-\alpha)}{\nu}$ καὶ ἐνδιάμεσα σημεῖα $\xi_k$, ἐκλέγουμε τὰ ἀριστερὰ ἄκρα τῶν διαστημάτων, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = (x_1-\alpha)e^\alpha + (x_2-x_1)e^{x_1} + \ldots + (\beta-x_{\nu-1})e^{x_{\nu-1}} =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[e^\alpha + e^{\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu}} + \ldots + e^{\alpha+\frac{(\nu-1)(\beta-\alpha)}{\nu}}\right] = e^\alpha \frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[1 + e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}} + \ldots + e^{\frac{\nu-1}{\nu}(\beta-\alpha)}\right] =$$

$$= e^\alpha \frac{\beta-\alpha}{\nu} \frac{\left(e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}\right)^\nu - 1}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1} = e^\alpha \frac{\beta-\alpha}{\nu} \frac{e^{\beta-\alpha}-1}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1} \left(e^\beta - e^\alpha\right) \frac{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1}$$

Ἄρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \Sigma_\nu = \left(e^\beta - e^\alpha\right) \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1} = e^\beta - e^\alpha$

διότι $\lim \frac{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1} = 1$ (Πρότασις 34 Ἄλγεβρα 2 σελὶς 412).

Ἑπομένως : $\int_\alpha^\beta e^x dx = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \Sigma_\nu = e^\beta - e^\alpha.$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. (Θεώρημα μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ). Ἐὰν ἡ f συνεχὴς εἰς τὸ $[\alpha, \beta]$ καὶ $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \equiv \mu$, $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \equiv M$, τότε εἶναι:**

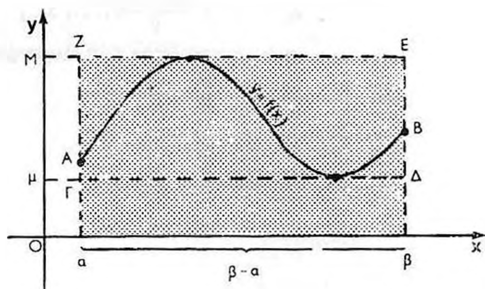
$$(\beta-\alpha)m \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq (\beta-\alpha)M$$

**Ἀπόδειξις.** Χωρίζομεν τὸ διάστημα $[\alpha, \beta]$ διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\nu-1}$ εἰς τὰ ν διαστήματα $[\alpha, x_1], [x_2, x_3], \ldots, [x_{\nu-1}, \beta]$ καὶ ἔστω τὸ ἄθροισμα $\Sigma_\nu = (x_1-\alpha)f(\xi_1) + (x_2-x_1)f(\xi_2) + \ldots + (\beta-x_{\nu-1})f(\xi_\nu)$, ὅπου $\xi_k \in (x_k, x_{k-1})$. Ὡς γνωστὸν ἡ f λαμβάνει εἰς τὸ $[\alpha, \beta]$ μίαν μεγίστην τιμὴν $M = \sup f(x)$ καὶ μίαν ἐλαχίστην τιμὴν $\mu = \inf f(x)$. Ἐὰν τώρα εἰς τὸ $\Sigma_\nu$

ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_\nu)$ ὑπὸ τῆς μεγίστης M ἀντιστοίχως τῆς ἐλαχίστης μ λαμβάνομεν $(x_1-\alpha)\mu+(x_2-x_1)\mu+\ldots(\beta-x_{\nu-1})\mu \leqq$ $\leqq \Sigma_\nu \leqq (x_1-\alpha)M+(x_2-x_1)\cdot M+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})M$. Καὶ ἂν λάβωμεν τὰ ὅρια τῶν μελῶν, ἔχομεν:

$$\mu(\beta-\alpha) \leqq \lim_{\substack{x\nu\to+\infty \\ x_k-\lambda_{k-1}\to 0}} \Sigma_\nu \leqq M(\beta-\alpha) \iff \mu(\beta-\alpha) \leqq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leqq M(\beta-\alpha).$$

**Παρατήρησις 1.** Μία ἐποπτικὴ ἀπόδειξις λαμβάνομεν ἐκ τοῦ σχήματος,




τος, ὅπου $(\beta-\alpha)\mu$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αβΔΓ, $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου τραπεζίου αβΒΑ καὶ $(\beta-\alpha)M$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αβΕΖ.

**Παρατήρησις 2.** Ἐκ τῆς προτάσεως (11) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ποσότης $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ περιέχεται μεταξὺ τῶν M, μ ἄρα θὰ ὑπάρχῃ μιὰ τουλάχιστον τιμὴ $\xi\epsilon(\alpha, \beta)$ τέτοια, ὥστε $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)$. Ἄρα ἐπανευρίσκομεν καὶ πάλιν τὴν πρότασιν (6).

Ἀναφέρομεν κατωτέρω, χωρὶς ἀπόδειξιν, καὶ ἄλλας προτάσεις χρησίμους διὰ τὸν λογισμὸν καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀποδείξεις νὰ γίνουν ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ. 12. Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, τότε ὑπάρχει καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ καὶ ἰσχύει :**

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqq \left|\int_\alpha^\beta |f(x)|dx\right|$$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.** Ἐὰν ὑπάρχουν τὰ ὁλοκληρώματα: $\int_\alpha^\beta f_1(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f_2(x)dx$, τότε ὑπάρχουν καὶ τά:

1) $\int_\alpha^\beta f_1(x)f_2(x)dx$ 2) $\int_\alpha^\beta \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $f_2(x)\geq\theta,\ \theta>0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.** Ἔστω f, $\alpha<x<\beta$ μία φραγμένη συνάρτησις τέτοια, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ τὸ $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx\ \forall\xi_1, \xi_2\in(\alpha,\beta)$.

Ὁρίζομεν τότε τὴν συνάρτησιν $\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ἂν } \alpha<x<\beta \\ \theta_1 & \text{ἂν } x=\alpha \\ \theta_2 & \text{ἂν } x=\beta \end{cases}$

ὅπου $\theta_1, \theta_2$ τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί. Τότε ὑπάρχει καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$ καὶ εἶναι ἀνεξάρτητον τῶν $\theta_1, \theta_2$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.** Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ ὁλοκλήρωμα: $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ μὲ $\alpha<\beta$ καὶ εἶναι $f(x)\geq 0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε ὑπάρχει καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sqrt{f(x)}\,dx$.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.** Ἰσχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_{\alpha+c}^{\beta+c} f(x-c)dx,\ \forall c\in R$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.** Ἰσχύει: $\int_{\alpha c}^{\beta c} f\left(\frac{x}{c}\right)dx = c\int_\alpha^\beta f(x)dx\ \forall c\in R^+$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.** Ἰσχύει: $\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx$

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.** Ἐὰν $f(x)=f(2\alpha-x)$, τότε: $\int_0^{2\alpha} f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$.

## 13.6 Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα ὡς συνάρτησις

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f(x) μὲ $x\in[\alpha,\beta]\subseteq R$ καὶ ἔστω ὅτι ὑπάρχει τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\xi^x f(t)dt$, ὅπου ξ σταθερὸν σημεῖον καὶ x τυχὸν σημεῖον τοῦ [α, β]. Ὁρίζεται τότε μία συνάρτησις ὡς ἑξῆς:

$$\varphi_\xi(x)\equiv\int_\xi^x f(t)dt,\ x\in[\alpha,\beta]$$

ἡ ὁποία καλεῖται συνάρτησις ἑνὸς ἄκρου ὁλοκληρώσεως.

Διὰ τὴν ὡς ἄνω ὡρισθεῖσαν συνάρτησιν ἰσχύει:

Εἶναι ἡ $\varphi_\xi(x)$ συνεχής, ἂν δὲ καὶ ἡ f συνεχής, τότε ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς $\varphi_\xi(x)$ καὶ ἰσχύει:

$$\varphi'_\xi(x) = f(x) \ \forall x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \left\{ \int_\xi^x f(t)dt \right\}' = f'(x) \ \forall x \in [\alpha, \beta].$$

καὶ γενικώτερον: $\left\{ \int_\xi^{\sigma x)} f(t)dt \right\}' = f[\sigma(x)]\, \sigma'(x).$

**Παρατήρησις.** Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ ἡ συνάρτησις:

$\sigma_\xi(x) = \int_x^\xi f(t)dt \ \forall x \in [\alpha, \beta]$ ἰσχύει δὲ $\sigma_\xi(x) = -\int_\xi^x f(t)dt = -\varphi_\xi(x) \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως:**

$$\varphi_0(x) = \int_0^x t^3dt$$

**Ἀπάντησις.** Ἔστω $F(t) = \int t^3dt \Rightarrow F'(t) = t^3$, ὁπότε $\int_0^x t^3dt = \Big[F(t)\Big]_0^x = F(x) - F(0).$

Ἄρα $\varphi_0(x) = \int_0^x t^3dt = F(x) - F(0) \Rightarrow \varphi'_0(x) = \left\{ \int_0^x t^3dt \right\}' = F'(x) = x^3$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως:**

$$\varphi_1(x) = \int_1^x \log 2t dt$$

**Ἀπάντησις.** Θέτομεν $F(t) = \int \log 2t dt \Rightarrow F'(t) = \log 2t$. Ἄρα $\int_1^x \log(2t)dt =$

$= \Big[F(t)\Big]_1^x = F(x) - F(1)$. Ἐπομένως $\varphi_1(x) = F(x) - F(1) \Rightarrow \varphi'_1(x) = F'(x)\,(x') =$

$= \log(2x)\,(2x)' = 2\log 2x.$

Τελικὰ λαμβάνομεν: $\varphi'_1(x) = \left\{ \int_1^x \log 2t dt \right\}' = 2\log 2x.$

## 13.7 Ὅριον ἀκολουθίας μὲ χρῆσιν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

Ὑπάρχουν ὡρισμέναι μορφαὶ ἀκολουθιῶν διὰ τὰς ὁποίας τὸ ὡρισμένο ὁλοκλήρωμα, ὅπως ὡρίστηκε κατὰ Riemann, δίδει λύση στὸ πρόβλημα εὑρέσεως τοῦ ὁρίου αὐτῶν.

Πρὸς τοῦτο δοθείσης μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_\nu \mid \nu \in N$ μετασχηματίζομεν αὐτὴν οὕτως, ὥστε οἱ ὅροι της νὰ προκύπτουν ὡς τιμὲς μιᾶς συναρτήσεως f(x) διὰ διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὸ ὅριο τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου ὅρου αὐτῆς καὶ διαμερίζομεν το διάστημα τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο ἀριθμοί, σχηματίζομεν οὕτως ἐν ἐνδιαμέσον ἄθροισμα ἡ ὁριακὴ τιμὴ τοῦ ὁποίου εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha)$ ποὺ συμπίπτει μὲ τὸ $\lim\alpha_\nu$

$$\lim_{\nu\to+\infty} \Sigma_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu$ μὲ $\alpha_\nu = \dfrac{1^2}{\nu^3+1^3} + \dfrac{2^2}{\nu^3+2^3} + \ldots + \dfrac{\nu^2}{\nu^3+\nu^3}$**

**Ἀπάντησις.** Ἡ $\alpha_\nu \mid \nu \in N$ γράφεται :

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[\frac{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\nu}\right)^3} + \frac{\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{\nu}\right)^3} + \ldots + \frac{\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2}{1+\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^3}\right],$$

ὁπότε φαίνεται ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$ μὲ $x = \dfrac{1}{\nu}, \dfrac{2}{\nu}, \ldots, \dfrac{\nu}{\nu}$ δίδει ὅλους τοὺς ὅρους τῆς $\alpha_\nu | \nu \in N$. Ἐπίσης διὰ $\nu \to +\infty$ ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος ὅρος τῆς ἀγκύλης συγκλίνουν στὸ 0 καὶ 1 ἀντιστοίχως ὡς ἐκ τούτου τὸ διάστημα [0, 1] διαιροῦμεν ὡς ἑξῆς $\mathcal{D}_\nu = \left\{0, \dfrac{1}{\nu}, \dfrac{2}{\nu}, \ldots, \dfrac{\nu}{\nu} = 1\right\}$, ,καὶ σχηματίζομεν τὸ ἐνδιάμεσο ἄθροισμα τῆς f(x) μὲ σημεῖα τὰ δεξιὰ ἄκρα τοῦ $\mathcal{D}_\nu$, ὁπότε ἔχομεν :

$$\lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{1}{\nu}\frac{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\nu}\right)^3} + \frac{1}{\nu}\frac{\left(\frac{2}{\nu}\right)}{1+\left(\frac{2}{\nu}\right)^3} + \ldots + \frac{1}{\nu}\frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^3}\right] = \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\Big[\log(1+x^3)\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\log 1 = \frac{\log 2}{3} \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = \frac{\log 2}{3}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim\alpha_\nu$ μὲ $\alpha_\nu = \sqrt{\left(1+\dfrac{1^2}{\nu^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{\nu^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{\nu^2}{\nu^2}\right)}$**

**Ἀπάντησις.** Εἶναι $\log\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}\left[\log\left(1+\dfrac{1^2}{\nu^2}\right) + \log\left(1+\dfrac{2^2}{\nu^2}\right) + \ldots + \log\left(1+\dfrac{\nu^2}{\nu^2}\right)\right]$

ὁπότε ἡ συνάρτησις $f(x) = \log(1+x^2)$ μὲ $x = \dfrac{1}{\nu}, \dfrac{2}{\nu}, \ldots, \dfrac{\nu}{\nu}$ δίδει ὅλους τοὺς ὅρους τῆς $\log\alpha_\nu$, τοῦ $\nu \to +\infty$ ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος ὅρος αὐτῆς συγκλίνουν πρὸς τὸ 0 καὶ 1 ἀντιστοίχως, διαμερίζομεν ἑπομένως τὸ διάστημα [0, 1] ὡς ἑξῆς : $\mathcal{D}_\nu = \left\{0, \dfrac{1}{\nu}, \dfrac{2}{\nu}, \ldots, \dfrac{\nu}{\nu} = 1\right\}$ καὶ σχηματίζομεν τὸ ἐνδιάμεσον ἄθροισμα

$\Sigma_\nu = \dfrac{1}{\nu}\log\left(1+\dfrac{1}{\nu^2}\right) + \dfrac{1}{\nu}\log\left(1+\dfrac{2^2}{\nu^2}\right) + \ldots + \dfrac{1}{\nu}\log\left(1+\dfrac{\nu^2}{\nu^2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ

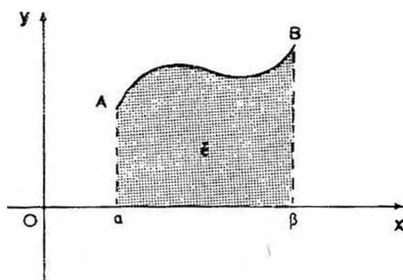
$$\lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \log(1+x^2)dx = \Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \log 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \log 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2.$$

Ἄρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \Sigma_\nu = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2.$

## 13. 8 Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα ὡς ἐμβαδὸν

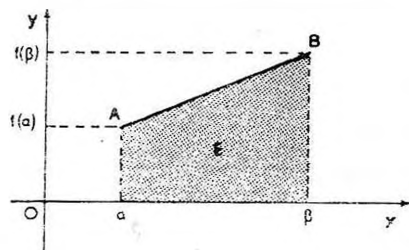
Ἔστω ἡ συνάρτησις f ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τὸ [α, β] μὲ $f(x) \geq 0$ $\forall x \epsilon [\alpha, \beta]$. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τῆς f, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν εὐθειῶν x = α, x = β ὡς εἰς




τὸ σχῆμα. Ἡ ἔννοια τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος προέκυψεν κατ' ἀρχὴν ὡς πρόβλημα ἐμβαδοῦ καὶ ἡ ἰδέα ὀφείλεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, ὁ ὁποῖος ἐφήρμοσεν ταύτην διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ κύκλου, τοῦ παραβολικοῦ τμήματος καὶ ἄλλων ἐπιπέδων χωρίων.

Γενικῶς τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἐπιπέδου χωρίου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ μιᾶς καμπύλης, προσεγγίζεται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁποῖον περικλείει μία ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὴν πολυγωνικὴ γραμμή.

Ἄς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὴν τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ f εἶναι γραμμικὴ




συνάρτησις, δηλ. $f(x) = \gamma x + \delta$, τότε τὸ χωρίον Ε εἶναι τὸ τραπέζιον ΑαβΒ (βλέπε τὸ ἀνωτέρω σχῆμα), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι :

$$E = \frac{(A\alpha)+(B\beta)}{2}(\beta - \alpha) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$$

Ἀλλὰ εἶναι καὶ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\gamma x+\delta)dx = \left[\gamma \frac{x^2}{2} + \delta x\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\gamma\beta^2}{2} +$

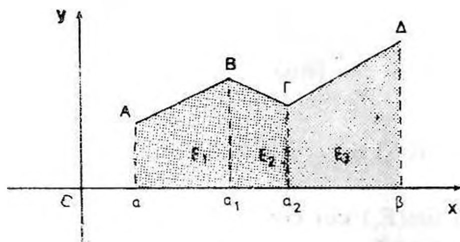
$$+ \delta\beta - \frac{\gamma\alpha^2}{2} - \delta\alpha = \frac{\gamma}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + \delta(\beta - \alpha) = \left[\frac{\gamma(\beta+\alpha)}{2} + \delta\right](\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{\gamma\beta+\gamma\alpha+2\delta}{2}(\beta - \alpha) = \frac{(\gamma\alpha+\delta)+(\gamma\beta+\delta)}{2}(\beta - \alpha) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = E.$$

Συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου E δίδεται ἀπὸ τό :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E$$

Ὁ τύπος ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ διάγραμμα τῆς f εἶναι



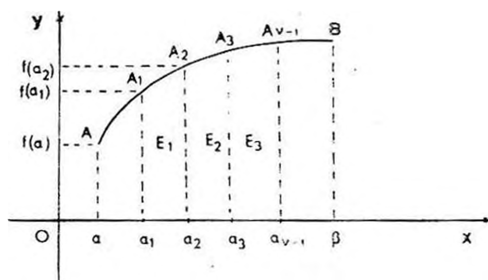

μία πολυγωνικὴ γραμμὴ ὡς εἰς τὸ σχῆμα. Τότε εἶναι $(E) = (E_1)+(E_2)+(E_2)$. Ἀλλὰ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$(E_1) = \int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)dx, \quad (E_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx, \quad (E_3) = \int_{\alpha_2}^{\beta} f(x)dx$$

καὶ βάσει τῆς προτάσεως 4 τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος λαμβάνομεν :

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (E)$$

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ διάγραμμα τῆς f εἶναι μία τυχοῦσα καμπύλη, τότε δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ διάστημα [α, β] εἰς ν ἴσα μέρη διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}$, καὶ ἔστω $A_1, A_2, \ldots, A_{\nu-1}$ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν $x = \alpha_1, x = \alpha_2, \ldots, x = \alpha_{\nu-1}$ καὶ τοῦ διαγράμματος τῆς f ἀντιστοίχως (ὡς εἰς τὸ σχῆμα). Τότε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν E προσεγγίζεται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχηματιζομένων τραπεζίων, δηλ. εἶναι :




$$(E_\nu) = \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha)}{2}(\alpha_1 - \alpha) + \frac{f(\alpha_2)+f(\alpha_1)}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{f(\beta) - f(\alpha_{\nu-1})}{2}(\beta - \alpha_{\nu-1}) = \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha)}{2}\,\frac{\beta - \alpha}{\nu} + \frac{f(\alpha_2)+f(\alpha_1)}{2}\,\frac{\beta - \alpha}{\nu} + \ldots +$$

$$+ \frac{f(\beta) - f(\alpha_{\nu-1})}{2}\,\frac{\beta - \alpha}{\nu} = \frac{\beta - \alpha}{\nu}[f(\alpha) + f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_{\nu-1})] + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2}\,\frac{\beta - \alpha}{\nu}$$

$$\text{ἢ } (E) = \frac{\beta - \alpha}{\nu}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_{\nu-1})+f(\beta)] + \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2}\,\frac{\beta - \alpha}{\nu}.$$

Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{\nu \to +\infty}(E_\nu)$ καὶ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, αὐτὸς δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ (E).

$$\text{Ἄρα } (E) = \lim_{\nu \to +\infty}(E_\nu) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\beta - \alpha}{\nu}[f(\alpha)+f(\alpha_1)+\ldots+f(\alpha_{\nu-1})] \quad \text{ἢ}$$

$$(E) = \lim_{\nu \to +\infty}(E_\nu) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\beta - \alpha}{\nu}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_{\nu-1})+f(\beta)], \text{ διότι}$$

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\nu}\,\frac{\beta - \alpha}{\nu} = \lim \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\nu}\,\frac{\beta - \alpha}{\nu} = 0.$$

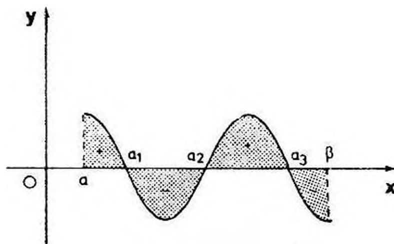
Ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \frac{\beta - \alpha}{\nu}[f(\alpha)+f(\alpha_1)+\ldots+f(\alpha_{\nu-1})] =$

$$= \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\beta - \alpha}{\nu}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_{\nu-1})+f(\beta)] = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

$$\text{Συνεπῶς } (E) = \lim_{\nu \to +\infty}(E_\nu) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

**Παρατήρησις 1.** Ἐὰν $f(x)<0\ \forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε τὸ $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εἶναι ἀρι-

θμὸς ἀρνητικός, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐὰν τὸ διάγραμμα τῆς f παρουσιάζεται ὡς εἰς τὸ σχῆμα, τότε τὸ ἐμβαδὸν θεωρεῖται προσημασμένον θετικόν - ἀρ-

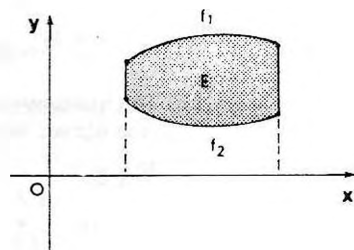



νητικόν. Κατὰ συνέπειαν διὰ τὸ προσημασμένον ἐμβαδὸν θὰ ἔχωμεν:

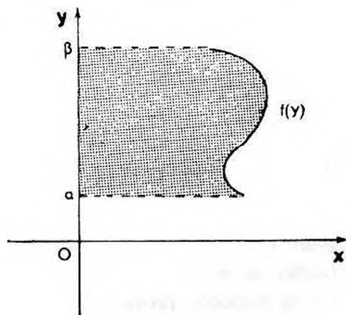
$$(E) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)dx + \int_{\alpha_3}^{\beta} f(x)dx.$$

**Παρατήρησις 2.** Ἐὰν τὸ χωρίον Ε περικλείεται ἀπὸ τὰς εὐθείας $x = \alpha$, $x = \beta$ καὶ τὰ διαγράμματα τῶν $f_1$ καὶ $f_2$ ὡς εἰς τὸ σχῆμα θὰ ἔχωμεν:

$$(E) = \int_{\alpha}^{\beta} [f_1(x)—f_2(x)]dx$$



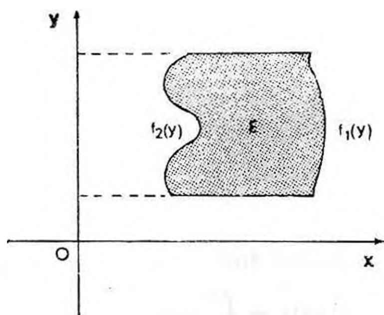

**Παρατήρησις 3.** Ἐὰν τὸ χωρίον Ε περικλείεται ἀπὸ τὰς εὐθείας $y = \alpha$, $y = \beta$ καὶ του διαγράμματος τῆς $x = f(y)$ ὡς εἰς τὸ σχῆμα θὰ εἶναι:




$$(E) = \int_{\alpha}^{\beta} f(y)dy$$

**Παρατήρησις 4.** Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου Ε ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὰς

εὐθείας y = α, y = β καὶ τὰ διαγράμματα τῶν συναρτήσεων $f_1(y)$ καὶ $f_2(y)$ εἶναι :
$$(E) = \int_{\alpha}^{\beta} [(f_1(y) - f_2(y)]dy$$

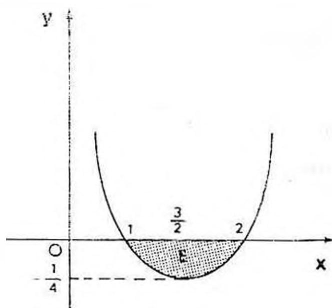



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν χωρίων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν κάτωθι καμπύλων :**

**α)** $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **καὶ** $y = 0$ **β)** $x = 2y^2$, $x = 0$, $y = 3$

**γ)** $y = -\frac{x^2}{4} + 2$, $x = 2y$ **δ)** $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$

**Ἀπάντησις. α)** Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν Ε κεῖται μεταξὺ τῆς καμπύλης μὲ ἐξίσωσιν $y = x^2 - 3x + 12$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα.



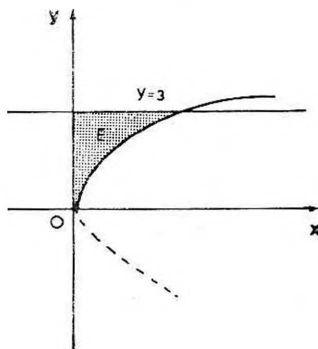

Ἄρα $(E) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = -\frac{2}{6}$.

*Σημείωσις 1.* Τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἀρνητικὸν διότι ὅταν ἡ ὁλοκλήρωσις γίνεται εἰς τὸν ἄξονα τῶν x, τότε κάτωθεν αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικόν, ἄνωθεν δὲ αὐτοῦ θετικόν· ἐὰν δὲ ἡ ὁλοκλήρωσις γίνεται εἰς τὸν ἄξονα yy′, τότε δεξιὰ αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι θετικὸν καὶ ἀριστερὰ ἀρνητικόν.

*Σημείωσις 2.* Τὰ ἄκρα ὁλοκληρώσεως εὑρίσκονται ἂν θέσωμεν $f(x) = 0$.

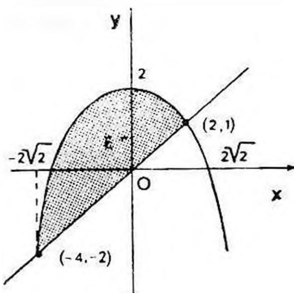
**β)** Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν Ε κεῖται μεταξὺ τῆς καμπύλης μὲ ἐξίσωσιν $x = 2y^2$ τοῦ ἄξονος yy' καὶ τῆς εὐθείας $y = 3$, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, ἐὰν δὲ ὁλοκληρώσωμεν ὡς πρὸς y, θὰ ἔχωμεν:

$$E = \int_0^3 x dy = \int_0^3 2y^2 dy = \left[2\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 18.$$

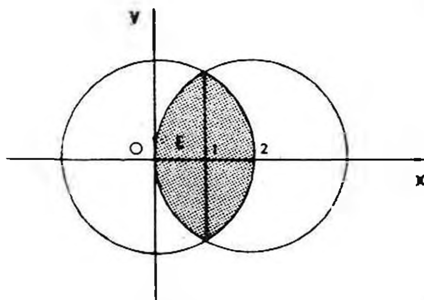



**γ)** Τὸ ἐμβαδὸν Ε περικλείεται μεταξὺ τῶν καμπύλων μὲ ἐξισώσεις $y_1 = -\frac{x^2}{4} + 2$ καὶ $y_2 = \frac{x}{2}$ τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα τομῆς ἔχουν συντεταγμένας $(-4, -2)$ καὶ $(2, 1)$ ὡς εἰς τὸ σχῆμα. Ἄρα $E = \int_{-4}^{2} (y_1 - y_2) dx = \int_{-4}^{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 2 - \frac{x}{2}\right) dx =$

$$= \left[-\frac{x^3}{12} + 2x - \frac{x^2}{4}\right]_{-4}^{2} = -\frac{8}{12} + 4 - \frac{4}{4} - \frac{64}{12} + 8 + \frac{16}{4} = 9.$$




**δ)** Αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ἴσαι καὶ ἡ μία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἄλλης, ἑπομένως ἡ κοινὴ χορδὴ καὶ ὁ ἄξων xx' χωρίζουν τὸ κοινὸν μέρος τῶν περιφερειῶν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ἄρα ἂν ὑπολογίσωμεν τὸ ἕνα ἐκ τῶν μερῶν, τότε τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν θὰ εἶναι τετραπλάσιον αὐτοῦ. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὴν πρώτην καμπύλην ἀπὸ 1 μέχρι 2, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα.




Συνεπῶς : $\left(\frac{E}{4}\right) = \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ θέτομεν $x = 2ημt$, $dx = 2συνtdt$ καὶ μὲ $x = 2$ λαμβάνομεν $ημt = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ μὲ $x = 1$ λαμβάνομεν $ημt = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται : $\left(\frac{E}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4ημt}\; 2συνtdt = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} συν^2tdt =$

$$= 4\left[\frac{συνtημt}{2} + \frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Τελικῶς $(E) = 4\left(\frac{E}{4}\right) = 4\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Ἂν θέλομε νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μιᾶς συναρτήσεως $ψ = f(x)$, τὸ βρίσκουμε :

$Γ : ψ = f(x)$

$$μ(Γ) = \int_α^β \sqrt{1+(ψ')^2}\,dx$$

**B** | **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ**
**ΜΕΘΟΔΟΙ**
**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

## 13. 9 Εισαγωγικά.

Ἡ τεχνικὴ τῆς ὁλοκληρώσεως δὲν εἶναι θέμα καὶ τόσον εὔκολον καὶ τοῦτο, διότι ἡ ποικιλία τῶν παρουσιαζομένων περιπτώσεων εἶναι πολὺ ἐκτεταμένη, ὅπως ἀσφαλῶς θὰ διακρίνατε ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ποὺ ἔχομεν ἀναφέρει ἐδῶ.

Βασικῶς θὰ πρέπει νὰ κατέχωμεν πολὺ καλῶς τοὺς κανόνας ὁλοκληρώσεως καὶ τὰς ἰδιότητας καθὼς καὶ τὰ βασικὰ ὁλοκληρώματα.

Πάντως ἐκεῖνο ποὺ πρέπει νὰ προσέξωμεν εἶναι ὅτι εἰς τὸ dx χωρὶς καμμίαν ἀλλαγὴν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν μίαν σταθερὰν εἰς τὸ x καθὼς ἐπίσης νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ σταθερὰν πολλαπλασιάζοντες ἀντιστοίχως καὶ τὸ x ἐπὶ τὴν σταθεράν. Προσέξατε ἀκόμη ὅτι ἐντὸς τοῦ dx δύναται νὰ εἰσαχθῇ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα μιᾶς συναρτήσεως f. Ἂν ἐκ τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν οὐδεὶς βοηθεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος, τότε καταφεύγομεν εἰς τὰ δύο μεθόδους ὁλοκληρώσεις κατὰ παράγοντας καὶ ἀντικαταστάσεως. Κυρίως ἡ μέθοδος ἀντικαταστάσεως διὰ τῆς καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς νέας συναρτήσεως βοηθεῖ τὰ μέγιστα εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ δοθέντος ὁλοκληρώματος. Ὅμως τὸ κυριώτερον ὅλων εἶναι ἡ μεγάλη ἐξάσκησις εἰς τὰ θέματα αὐτά.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ὑπολογίσατε τὰ ἀκόλουθα ὁλοκληρώματα:**

α) $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}\,dx \mid x \neq -1, 2$ β) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)}\,dx \mid x \neq 1, -2$

γ) $\int \sqrt{3x+1}\,dx \mid x > -\frac{1}{3}$ δ) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\,dx \mid x > -\frac{3}{2}$

ε) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x+2)}\,dx \mid x - 2$ στ) $\int \frac{(\log x)^\nu}{x}\,dx \mid x > 0$

ζ) $\int \frac{\eta\mu x\,dx}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} \;\Big|\; x \neq 2k\pi,\ k \in Z$ η) $\int \frac{(28x^3+6x)dx}{7x^4+3x^2+1}$

θ) $\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx \;\Big|\; x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in Z$ ι) $\int \frac{x\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}\,dx \;\Big|\; x \neq 2k\pi,\ k \in Z$

ια) $\int \eta\mu^3 x dx$

ιβ) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ $x>1$

ιγ) $\int \frac{dx}{x\log x}$ | $x>0$

ιδ) $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{(x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2} dx$ | $0<x<\frac{\pi}{2}$

ιε) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}\, dx$ | $x^2-3x+2>0$

ιστ) $\int \frac{xdx}{1+\alpha^2x^2}$ | $x\epsilon R$, $\alpha\neq 0$

ιζ) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} dx$ | $x\epsilon R$

ιη) $\int \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x} dx$ | $x\epsilon R$

ιθ) $\int \frac{x}{(1-x)^3} dx$ | $x\neq 1$

κ) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+1}}$ | $x\epsilon R$.

**Ἀπάντησις.** α) Ἔχομεν $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)} \equiv 1+\frac{x+2}{(x+1)(x-2)} \equiv 1+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-2}$ ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν: $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{4}{3}$. Ἑπομένως: $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} dx =$

$$= \int\left(1-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{4}{3}\frac{1}{x-2}\right)dx = \int dx - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-2} = x -$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{d(x+1)}{x+1}+\frac{4}{3}\int\frac{d(x+2)}{x+2} = x-\frac{1}{3}\log|x+1|+\frac{4}{3}\log|x+2|.$$

β) Ἔχομεν $\frac{x^3}{(x-1)(x+2)} \equiv \frac{x^3}{x^2+x-2} \equiv x-1+\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+2} \equiv x-1+$

$$+\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{3}\frac{1}{x+2}.$$ Ἑπομένως:

$$\int\frac{x^3}{(x-1)(x+2)}dx = \int\left(x-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{3}\frac{1}{x+2}-1\right)dx = \int xdx -$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{8}{3}\int\frac{d(x+2)}{x+2}-\int = \frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\log|x-1|+\frac{8}{3}\log|x+2|-x.$$

γ) Θέτομεν $y=3x+1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x+1)' = 3$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\int\sqrt{3x+1}dx = \frac{1}{3}\left[\int\sqrt{y}\,dy\right]_{y=3x+1} = \frac{1}{3}\left[\int y^{\frac{1}{2}}dy\right]_{y=3x+1} =$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{y^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\right]_{y=3x+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=3x+1} = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}.$$

δ) $$\int\frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx = \left[\int\frac{(y-3)dy}{2.2\sqrt{y}}\right]_{y=2x+3} = \left[\frac{1}{4}\int\frac{ydy}{\sqrt{y}}-\frac{3}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y}}\right]_{y=2x+3} =$$

$$=\left[\frac{1}{4}\int y^{\frac{1}{2}}dy-\frac{3}{4}\int y^{-\frac{1}{2}}dy\right]_{y=2x+3} = \left[\frac{1}{4}\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{3}{4}\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{y=2x+3} =$$

$$=\left[\frac{1}{6}y^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right]_{y=2x+3} = \frac{1}{6}\sqrt{(2x+3)^3}-\frac{3}{2}\sqrt{2x+3}.$$

ε) Ἔχομεν: $\frac{x+1}{(x^2+1)(x+2)} \equiv \frac{\alpha x+\beta}{x^2+1} + \frac{\gamma}{x+2} \equiv \frac{1}{5}\,\frac{x+3}{x^2+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+2}.$

Ἐπομένως: $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx = \int\left(\frac{1}{5}\,\frac{x+3}{x^2+1} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{x+2}\right)dx =$

$$= \frac{1}{5}\int\frac{(x+3)dx}{x^2+1} - \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{5}\int\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{3}{5}\int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{10}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{3}{5}\int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{5}\int\frac{d(x+2)}{x+2} = \frac{1}{10}\log(x^2+1) + \frac{3}{5}\,\text{τοξεφ}x -$$

$$- \frac{1}{5}\log|x+2|.$$

στ) Ἐὰν $y = \log x$, τότε $\frac{dy}{dx} = (\log x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}$ καὶ ἐπομένως:

$$\int\frac{(\log x)^\nu}{x}dx = \left[\int y^\nu dy\right]_{y=\log x} = \left[\frac{y^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{y=\log x} = \frac{(\log x)^{\nu+1}}{\nu+1}$$

ζ) $\int\frac{\eta\mu x dx}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} = -\int\frac{-\eta\mu x dx}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} = -\int\frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} = -\int\frac{d(\sigma\upsilon\nu x+1)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} =$

$$= -\left[\int\frac{dy}{y^2}\right]_{y=1+\sigma\upsilon\nu x} = -\left[\int y^{-2}dy\right]_{y=1+\sigma\upsilon\nu x} = -\left[\frac{y^{-2+1}}{-2+1}\right]_{y=1+\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= [y^{-1}]_{y=1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}.$$

η) $\int\frac{(28x^3+6x)dx}{7x^4+3x^2+1} = \int\frac{d(7x^4+3x^2+1)}{7x^4+3x^2+1} = \log(7x^4+3x^2+1).$

θ) $\int\frac{xdx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \int x\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx = \int x(\varepsilon\varphi x)'dx = x\varepsilon\varphi x - \int\varepsilon\varphi x(x)'dx = x\varepsilon\varphi x -$

$$- \int\varepsilon\varphi x dx = x\varepsilon\varphi x - \int\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = x\varepsilon\varphi x + \int\frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = x\varepsilon\varphi x + \log|\sigma\upsilon\nu\, x|.$$

ι) $\int\frac{x\eta\mu x dx}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} = \int x\left(\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)'dx$ (κατὰ τὸ ζ). Ἐπομένως:

$$\int\frac{x\eta\mu x dx}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} = x\cdot\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x} - \int\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}(x)'dx = \frac{x}{1+\sigma\upsilon\nu x} - \int\frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \frac{x}{1+\sigma\upsilon\nu x} - \int\frac{dx}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = \frac{x}{1+\sigma\upsilon\nu x} - \int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = \frac{x}{1+\sigma\upsilon\nu x} - \varepsilon\varphi\frac{x}{2}.$$

ια) $\eta\mu^3 x dx = \int\left(\frac{3}{4}\eta\mu x - \frac{1}{4}\eta\mu 3x\right)dx =$ (διότι $\eta\mu 3x = 3\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x$)

$$= \frac{3}{4}\int\eta\mu x dx - \frac{1}{4}\int\eta\mu 3x dx = -\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{12}\int d(\sigma\upsilon\nu 3x) = -\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{12}\sigma\upsilon\nu 3x =$$

$$= -\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu^3 x.$$

**ιβ)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}dx +$

$$+\frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int(x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1) + \frac{1}{2}\int(x-1)^{\frac{1}{2}}d(x-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}.$$

**ιγ)** 'Εὰν $y = \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\log x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{dx}{x\log x} = \left[\int\frac{dy}{y}\right]_{y=\log x} = [\log|y|]_{y=\log x} = \log|\log x|.$$

**ιδ)** Θέτομεν $y = x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)' = x\sigma\upsilon\nu x$. 'Επομένως θὰ εἶναι:

$$\frac{x\sigma\upsilon\nu x dx}{(x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2} = \left[\int\frac{dy}{y^2}\right]_{y=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{y^{-2+1}}{2+1}\right)_{y=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{y}\right)_{y=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{1}{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}.$$

**ιε)** Θέτομεν $x^2-3x+2 = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x^2-3x+2)' = 2x-3$ καὶ ἑπομένως:

$$\int(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}\,dx = [\int\sqrt{y}\,dy]_{y=x^2-3x+2} = \left(\frac{y^{+\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)_{y=x^2-3x+2} =$$

$$= \frac{2}{3}(x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}.$$

**ιστ)** $\frac{xdx}{\sqrt{1+\alpha^2x^2}} = \frac{1}{2\alpha^2}\left[\int y^{-\frac{1}{2}}dy\right]_{y=1+\alpha^2x^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{y^{-\frac{1}{2}-1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)_{y=1+\alpha^2x^2} =$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\cdot(1+\alpha^2x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

**ιζ)** 'Εὰν $y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (e^x)' = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$ καὶ ἑπομένως:

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \left[\int\frac{y^2-1}{y(y^2+1)}dy\right]_{y=e^x} = \left[\int\left(-\frac{1}{y}+\frac{2y}{y^2+1}\right)dy\right]_{y=e^x} =$$

$$= \left[-\int\frac{dy}{y}\right]_{y=e^x} + \left[\int\frac{2ydy}{y^2+1}\right]_{y=e^x} = -[\log|y|]_{y=e^x} + [\log(y^2+1)]_{y=e^x} =$$

$$= -\log e^x + \log(e^{2x}+1) = \log\frac{e^{2x}+1}{e^x} = \log(e^x+e^{-x}).$$

ιη) Ἐὰν $y = 1+\eta\mu^2 x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+\eta\mu^2 x)' = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ καὶ ἑπομένως

$$\int \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx}{1+\eta\mu^2 x} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dy}{y}\right]_{y=1+\eta\mu^2 x} = \frac{1}{2}[\log|y|]_{y=1+\eta\mu^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+\eta\mu^2 x) = \log\sqrt{1+\eta\mu^2 x}.$$

ιθ) Θέτομεν $\frac{x}{(1-x)^3} \equiv \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{(1-x)^3}$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$\frac{x}{(1-x)^3} \equiv \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}$ καὶ ἄρα: $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx = \int \frac{-dx}{(1-x)^2} + \int \frac{dx}{(1-x)^3}$.

Ἄν τώρα $y = 1-x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1-x)' = -1 \Rightarrow dy = -dx$ καὶ ἔχομεν:

$$\int \frac{-dx}{(1-x)^2} + \int \frac{dx}{(1-x)^3} = \left[\int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{dy}{y^3}\right]_{y=1-x} = \left(\frac{y^{-2+1}}{-2+1} - \frac{y^{-3+1}}{-3+1}\right)_{y=1-x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}\right)_{y=1-x} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}.$$

κ) $$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3 dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+1)}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dy}{\sqrt{y}}\right)_{y=1+x^4} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)_{y=1+x^4} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{y}\right]_{y=1+x^4} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Δείξατε ὅτι $\int e^x x^\nu dx = x^\nu e^x - \nu\int x^{\nu-1}e^x dx$ καὶ ἑπομένως ἂν $I_\nu = \int e^x x^\nu dx$ ἰσχύει ὁ τύπος ἀναγωγῆς:**

$$I_\nu = x^\nu e^x - \nu\, I_{\nu-1} \mid \nu \in N.$$

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $\int e^x x^\nu dx = \int x^\nu (e^x)' dx = x^\nu e^x - \int e^x (x^\nu)' dx = x^\nu e^x - \int e^x \nu x^{\nu-1} dx =$
$= x^\nu e^x - \nu\int e^x x^{\nu-1} dx.$

Ἤτοι: $I_\nu = x^\nu e^x - \nu\, I_{\nu-1}$.

Ἐφαρμογὴ διὰ $\nu = 4$.

| Ἔχομεν: | |
|---|---|
| | $I_4 = x^4 e^x - 4I_3$ |
| $-4$ | $I_3 = x^3 e^x - 3I_2$ |
| $12$ | $I_2 = x^2 e^x - 2I_1$ |
| $-24$ | $I_1 = xe^x - 1\int e^x dx = e^x x - e^x$ |

$$I_4 = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ἐὰν $I_\nu = \int x^\nu e^{\alpha x} dx$, δείξατε ὅτι:**

$$I_\nu = \frac{x^\nu e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} I_{\nu-1} \mid \alpha \neq 0 \;\; \nu \in N.$$

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $\int x^\nu e^{\alpha x}dx = \int x^\nu \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' dx = x^\nu \cdot \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}(x^\nu)' dx =$
$= \frac{x^\nu e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha}\int x^{\nu-1} e^{\alpha x} dx$, ἤτοι : $I_\nu = \frac{x^\nu e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} I_{\nu-1}$.

Ἐφαρμογή : Διά $\alpha = 2$ καί $\nu = 3$.

Εὑρίσκομεν : $I_{\varepsilon} = \frac{e^{2x}}{8}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Δείξατε ὅτι ἐὰν $I_\nu = \int x\sigma\upsilon\nu px dx \mid \nu \in N,\ p \in N$ θὰ εἶναι :**

$$I = \frac{x^\nu \eta\mu px}{p} + \frac{\nu x^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu px}{p^2} - \frac{\nu(\nu-1)}{p^2} I_{\nu-2}.$$

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν $I_\nu = \int x^\nu \sigma\upsilon\nu px dx = \int x^\nu \left(\frac{\eta\mu px}{p}\right)' dx = x^\nu \frac{\eta\mu px}{p} - \int \frac{\eta\mu px}{p}$
$(x^\nu)'dx = \frac{x^\nu \sigma\sigma\upsilon\nu px}{p} - \frac{\nu}{p}\int x^{x-1}\eta\mu px dx = \frac{x^\nu \eta\mu px}{p} - \frac{\nu}{p}\int x^{\nu-1}\left(\frac{-\sigma\upsilon\nu px}{p}\right)' dx =$
$= \frac{x^\nu \eta\mu px}{p} - \frac{\nu}{p}\left[x^{\nu-1} \cdot \frac{-\sigma\upsilon\nu px}{p} - \int\left(\frac{-\eta\mu px}{p}\right)(x^{\nu-1})' dx\right] = \frac{x^\nu \eta\mu px}{p} + \frac{\nu x^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu px}{p^2} -$
$- \frac{\nu(\nu-1)}{p^2}\int x^{\nu-2}\sigma\upsilon\nu px dx = \frac{x^\nu \eta\mu px}{p} + \frac{\nu x^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu px}{p^2} - \frac{\nu(\nu-1)}{p^2} I_{\nu-2}$.

Διὰ ν ἄρτιον εὑρίσκομεν : $I_0 = \int \sigma\upsilon\nu px dx = \frac{\eta\mu px}{p}$ $(\nu=0)$ καὶ διὰ ν περιττὸν εὑρίσκομεν :

$I_1 = \int x\sigma\upsilon\nu px dx = \frac{x\eta\mu px}{p} + \frac{\sigma\upsilon\nu px}{p^2}$.

Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ διὰ $\nu = 4$ καὶ $p = 2$.

Εὑρίσκομεν : $I_4 = \frac{\eta\mu 2x}{4}(2x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{x\sigma\upsilon\nu 2x}{2}(2x^2 - 3)$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ἐὰν $I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta \mid \nu \in N$ δείξατε ὅτι :**

$$I_\nu = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}.$$

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν : $I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu \theta d\theta \equiv \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta(\eta\mu\,\theta)'d\theta = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\,\eta\mu\,\theta -$
$- \int \eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta)'d\theta = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta - \int \eta\mu\theta \cdot [(\nu-1)\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\theta(-\eta\mu\theta)]d\theta = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta +$
$+ (\nu-1)\int \eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\theta d\theta = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta + (\nu-1)\int(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)\sigma\upsilon\nu^{x-2}\theta d\theta = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta +$
$+ (\nu-1)\left(\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\theta d\theta - \int \sigma\upsilon\nu^\nu\theta d\theta\right) = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta + (\nu-1)(I_{\nu-2} - I_\nu)$.

Ἄρα $I_\nu + (\nu-1)I_\nu = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta + (\nu-1)I_{\nu-2} \Rightarrow I_\nu = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\eta\mu\theta}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$.

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν ἂν $I_\nu = \int \eta\mu^\nu\theta d\theta$ ὅτι :

$$I_\nu = \frac{-\eta\mu^{\nu-1}\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}.$$

Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ εἰς τὸ $\int \sigma\upsilon\nu^6\theta d\theta$.

Εὑρίσκομεν : $\int \sigma\upsilon\nu\theta^6 d\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu^5\theta\eta\mu\theta}{6} + \frac{5\sigma\upsilon\nu^3\theta\eta\mu\theta}{24} + \frac{5}{16}\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + \frac{5\theta}{16}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.** Ἐὰν $I_\nu = \int \frac{x^\nu dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$ δείξατε ὅτι:

$$I_\nu = \frac{x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2}}{\nu} - \frac{\nu-1}{\nu}\alpha^2 I_{\nu-2}.$$

**Ἀπάντησις.** Ἔχομεν: $I_\nu = \int \frac{x^\nu dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int x^{\nu-1}(\sqrt{x^2+\alpha^2})' dx =$

$= x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} - \int \sqrt{x^2+\alpha^2}\,(x^{\nu-1})' dx = x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} -$

$-(\nu-1)\int \sqrt{x^2+\alpha^2}\; x^{\nu-2} dx =$

$= x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} - (\nu-1)\int \frac{(x^2+\alpha^2)x^{\nu-2}}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} dx =$

$= x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} - (\nu-1)\left(\int \frac{x^\nu dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} + \alpha^2 \int \frac{x^{\nu-2}dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\right) =$

$= x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} - (\nu-1)(I_\nu + \alpha^2 I_{\nu-2}) \Rightarrow \nu I_\nu = x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} -$

$-\alpha^2(\nu-1) I_{\nu-2}$, ἤτοι τὸ ἀποδεικτέον.

Διὰ $\nu = 5$ εὑρίσκομεν:

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{15}(3x^4 - 4x^2\alpha^2 + 8\alpha^4).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.** Ὑπολογίσατε τὰ ἀκόλουθα ὡρισμένα ὁλοκληρώματα:

α) $\int_\alpha^\beta x^2 dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx$

γ) $\int_1^2 \log x dx$ δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi x dx$

ε) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}$ στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2\nu}} \sigma\upsilon\nu(\nu x)dx \mid \nu\in N$

ζ) $\int_0^{\nu\pi} \eta\mu x dx \mid \nu\in N$ η) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta}$

**Ἀπάντησις. α)** Ἔχομεν: $\int_\alpha^\beta x^2 dx = \left[\int x^2 dx\right]_\alpha^\beta = \left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3} =$

$= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3).$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \left[\int \eta\mu x dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - (-\sigma\upsilon\nu 0) =$

$= \sigma\upsilon\nu 0 = 1.$

γ) $\int_1^2 \log x dx = \left[x(\log x - 1)\right]_1^2 = 2(\log 2 - 1) - 1(\log 1 - 1) = 2\log 2 - 2 + 1 = 2\log 2 -$

$- 1 = \log 4 - 1.$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx = \Big[-\log(\sigma\upsilon\nu x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\log\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \log\sigma\upsilon\nu 0 = -\log\frac{1}{2} +$

$+ \log 1 = -\log 1 + \log 2 = \log 2.$

ε) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \Big[\int \frac{x}{1+x^2}dx\Big]_0^1 = \big[\log\sqrt{1+x^2}\big]_0^1 = \log\sqrt{2} - \log\sqrt{1} = \log\sqrt{2}.$

στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2\nu}} \sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = \Big[\frac{\eta\mu\nu x}{\nu}\Big]_0^{\frac{\pi}{2\nu}} = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\nu} - 0 = \frac{1}{\nu}.$

ζ) $\int_0^{\nu\pi} \eta\mu x dx = \Big[-\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^{\nu\pi} = -\sigma\upsilon\nu\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 - \sigma\upsilon\nu\pi\nu,$

ἂν ν ἄρτιος, θὰ εἶναι : $1 - 1 = 0$

ἂν ν περιττός, θὰ εἶναι : $1 - (-1) = 2$

η) $\int_0^{\pi} \frac{4\eta\mu\theta d\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta} = -\int_0^{\pi} \frac{d(4\sigma\upsilon\nu\theta+5)}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta} = -\frac{d(4\sigma\upsilon\nu\theta+5)}{4\sigma\upsilon\nu\theta+5}\int_0^{\pi} =$

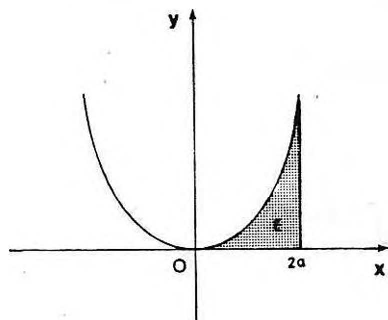
$= -\log(5+4\sigma\upsilon\nu\theta)\int_0^{\pi} = -\log(5-4)+\log(5+4) = -\log 1 + \log 9 = \log 9.$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς παραβολῆς μὲ ἐξίσωσιν $f(x) = 3x^2$ καὶ τῆς εὐθείας μὲ ἐξίσωσιν $f_1(x) = 2\alpha \mid \alpha > 0$ (ἐννοεῖται καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x). Συντόμως :**

**$f(x) = 3x^2$ μὲ $x \in [0, 2\alpha]$.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

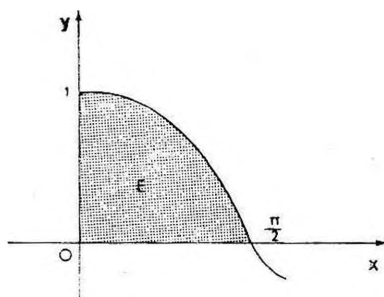
$$(E) = \int_0^{2\alpha} 3x^2 dx = 3\int_0^{2\alpha} x^2 dx = 3\int_0^{2\alpha} x^2 dx = 3\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{2\alpha} = \Big[x^3\Big]_0^{2\alpha} = (2\alpha)^3 - 0^3 = 8\alpha^3$$



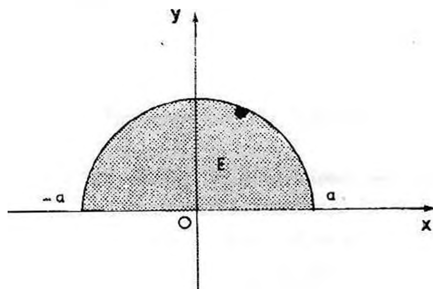

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ μέ : $x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]$.**

**'Απάντησις.** Ἔχομεν $(E) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = \left[\int \sigma\upsilon\nu x dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \eta\mu \frac{\pi}{2} - \eta\mu 0 = 1.$




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος α.**




**'Απάντησις.** Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου εἶναι $x^2+y^2 = \alpha^2$ μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα α. Ἑπομένως διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ χωρίου (ἐπιπέδου) E, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ διαγράμματος τῆς καμπύλης μὲ ἐξίσωσιν $f(x) = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ καὶ μὲ $x \in [-\alpha, \alpha]$ (καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x) ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx.$

Ἤτοι $(E) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx.$

Κατ' ἀρχὴν ὑπολογίζομεν τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα $\int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx.$

Θέτομεν $x = \alpha y$ καὶ συνεπῶς $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha}$, ἤτοι $dx = \alpha dy.$

Κατόπιν τούτου λαμβάνομεν:

$$I = \int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 y^2}\, \alpha dy = \alpha^2 \int \sqrt{1 - y^2}\, dy.$$

Θέτομεν τώρα $y = ημθ$, ὅτε $\frac{dy}{dθ} = (ημθ)' = συνθ$ καὶ ἑπομένως:

$$I = α^2 \int \sqrt{1 - ημ^2θ}\, συνθ dθ = α^2 \int συνθ(ημθ)' dθ = α^2(συνθημθ - \int ημθ(συνθ)' dθ) =$$

$$= α^2(συνθημθ + \int ημ^2θ dθ) = α^2(συνθημθ + \int (1 - συν^2θ) dθ) =$$

$$= α^2(συνθημθ + θ - \int συν^2θ dθ) = α^2συνθημθ + α^2θ - I$$

$$2I = α^2(ημθσυνθ + θ) \Rightarrow I = α^2\left(\frac{ημ2θ}{4} + \frac{θ}{2}\right).$$

Τὰ ἄκρα ὁλοκληρώσεως καθορίζονται τώρα ὡς ἀκολούθως:

Εἶναι $-α \leqq x \leqq α \iff -α \leqq αy \leqq α \iff -1 \leqq y \leqq 1$ καὶ ἐπειδὴ $y = ημθ \Rightarrow$

$$-\frac{π}{2} \leqq θ \leqq \frac{π}{2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅθεν ὅτι: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy = \int_{-\frac{π}{2}}^{\frac{π}{2}} συν^2θ dθ.$

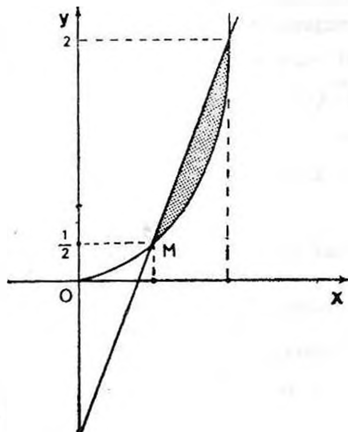
Ἄρα: $\int_{-\frac{π}{2}}^{\frac{π}{2}} συν^2θ dθ = \left[\frac{ημ2θ}{4} + \frac{θ}{2}\right]_{-\frac{π}{2}}^{\frac{π}{2}} = \frac{π}{4} + \frac{π}{4} = \frac{π}{2}$, ὁπότε $\int_{-α}^{α} \sqrt{α^2 - x^2} dx =$

$= α^2 \frac{π}{2} = \frac{πα^2}{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι $πα^2$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν γραμμῶν μὲ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως:**

$$\mathbf{f_1(x) = 2x^2 \quad καὶ \quad f_2(x) = 3x - 1}$$

**Ἀπάντησις.** Αἱ γραμμαὶ μὲ ἐξισώσεις $f_1(x) = 2x^2$ καὶ $f_2(x) = 3x - 1$ ἔχουν σημεῖα τομῆς τὰ $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ καὶ $M_2(1, 2)$ καὶ $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f_2(x) \geqq f_1(x)$.



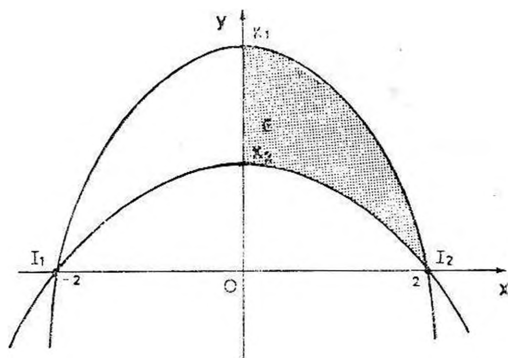
Θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (3x-1-2x^2)\,dx = 3\int_{\frac{1}{2}}^{1} x dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx - 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 - 1 - \frac{2.1^3}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Θεωροῦμεν τὰς καμπύλας μὲ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως $f_1(x) = -x^2+4$ καὶ $f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2+1$, αἱ ὁποῖαι εἶναι δύο παραβολαὶ μὲ σημεῖα τομῆς τὰ $I_1$ καὶ $I_2$ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ τετμημένας ἀντιστοίχως $x = -2$ καὶ $x = 2$. Ἐὰν αἱ κορυφαὶ τῶν καμπύλων εἶναι $k_1$ καὶ $k_2$ μὲ τεταγμένας ἀντιστοίχως $y = 4$ καὶ $y = 1$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τοῦ κειμένου μεταξὺ τῶν τόξων $I_1k_1I_2$ καὶ $I_1k_2I_2$.**

**Ἀπάντησις.** Ἐπειδὴ $f_1(-x) \equiv f_1(x)$ καὶ $f_2(-x) \equiv f_2(x)$ $\forall x \in R$ ἔπεται ὅτι ἑκάστη τῶν $f_1$, $f_2$ εἶναι ἀρτία συνάρτησις καὶ ὅτι ὡς ἐκ τούτου ἔχουν ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα τῶν y.




Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γραμμοσκιασμένου μέρους καὶ νὰ τὸ διπλασιάσωμεν. Ἐπειδὴ διὰ $\forall x \in [0, 2]$ εἶναι $f_1(x) \geq f_2(x)$ θὰ ἔχωμεν:

$$(E) = \int_0^2 \left(-x^2+4+\frac{1}{4}x^2-1\right)dx = \int_0^2 \left(-\frac{3x^2}{4}+3\right)dx = \int_0^2 \frac{-3x^2}{4}dx +$$

$$+ \int_0^2 3dx = \left[-\frac{3}{4}\,\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^2 = \left[-\frac{x^3}{4}+3x\right]_0^2 = \left(-\frac{8}{4}+6\right) - 0 = 4$$

καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν θὰ εἶναι: (2E) = 8.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον:**

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

**1) Νὰ μελετηθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς.**

**2) Νὰ ὁρισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου (E) = E(λ), τὸ ὁποῖον περιέχεται**

**μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῆς καμπύλης καὶ τῶν τεταγμένων δύο σημείων μὲ τετμημένας $x = 2$ καὶ $x = \lambda(\lambda > 2)$.**

**Ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim E(\lambda)$, ἂν $\lambda \to +\infty$.**

**Ἀπάντησις.** Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ $R - \{-1, 1\}$. Παρατηροῦμεν ὅτι $f(-x) \equiv f(x)\ \forall x \in R - \{-1, 1\}$, καὶ ἑπομένως ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα τῶν y. Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ μελετῇ εἰς τὸ $[0, +\infty)$ μὲ ἐξαίρεσιν τὸ σημεῖον 1 καὶ ἀκολούθως νὰ συμπληρωθῇ διὰ τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

$$\text{Ἡ } f'(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' + \left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' = -2\left[\frac{x-1}{(x-1)^4} + \frac{x+1}{(x+1)^4}\right] =$$

$$= -2\,\frac{(x-1)(x+1)^4 + (x+1)(x-1)^4}{(x^2-1)^4} = -4\,\frac{x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

καὶ εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της.

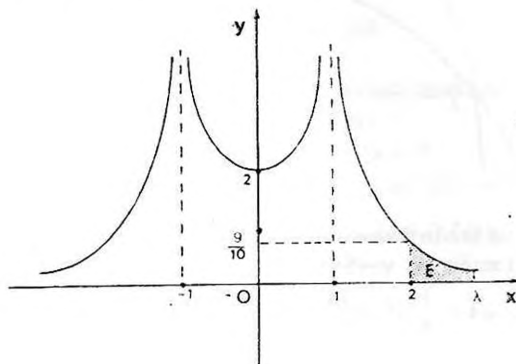
Παρατηροῦμεν ὅτι $f'(x) = 0$ ἂν $x = 0 (x \neq 1)$ καὶ $f'(x) > 0$ διὰ $0 < x < 1$ καὶ $f'(x) < 0$ διὰ $x > 1$.

Εἶναι δὲ $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$ καὶ $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Καταστρώνομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα μεταβολῶν.

| x | 0 | | 1 | | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | 0 | + | \| | | — | |
| f(x) | 2 | ↗ | +∞ \| +∞ | | ↘ | 0 |

Ἡ γραφικὴ παράστασις:




2) Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ $E(\lambda)$ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι:

$$E(\lambda) = \int_0^{\lambda}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]_2^{\lambda} = \frac{4}{3} - \frac{2\lambda}{\lambda^2-1}$$

καὶ εἶναι $\underset{\lambda \to +\infty}{E(\lambda)} = \frac{4}{3}$, ἀφοῦ: $\frac{2\lambda}{\lambda^2-1} \to 0$.

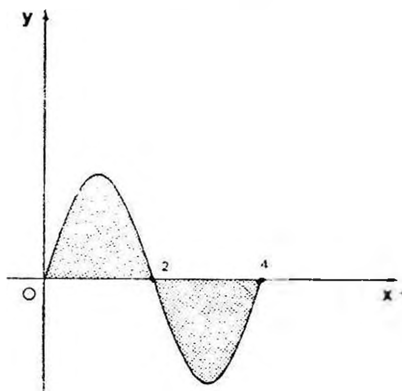
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τοῦ κειμένου μεταξὺ ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.**

**Ἀπάντησις.** Ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα $x = 0$, $x = 2$ καὶ $x = 4$ καὶ διὰ $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $f'(x) = 3x^2 = 12x+8$ καὶ $f''(x) = 6x - 12$.

Εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x > \frac{6+\sqrt{12}}{3}$ καθὼς καὶ μὲ $x < \frac{6-\sqrt{12}}{3}$, ἐνῷ εἶναι $f'(x) < 0$ διὰ $\frac{6-\sqrt{12}}{3} < x < \frac{6+\sqrt{12}}{3}$.

Εἰς τὰ σημεῖα $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{3}$, ἐπειδὴ $f''\left(\frac{6+\sqrt{12}}{3}\right) > 0$ ὑπάρχει ἐλάχιστον καὶ ἐπειδὴ $f''\left(\frac{6-\sqrt{12}}{3}\right) < 0$ ὑπάρχει μέγιστον. Τὸ σημεῖον $x = 2$ εἶναι σημεῖον καμπῆς. Διὰ $x > 2$ ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω καὶ διὰ $0 < x < 2$ στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω. Ἔχομεν συνεπῶς τὴν κάτωθι γραφικὴν παράστασιν.




Ζητοῦμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γραμμοσκιασμένου μέρους.

Θὰ ἔχωμεν :

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2+8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2+8x)dx = \left[\frac{x^3}{4} - 2x^3+4x^2\right]_0^2$$

$$- \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3+4x^2\right]_2^4 = 4+4 = 8.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐλλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, ἤτοι μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἡμιάξονας α, β.**

**Ἀπάντησις.** Θὰ ζητήσωμεν (λόγῳ τῆς ὑπαρχούσης συμμετρίας) νὰ ὑπολογίσωμεν κατ᾽ ἀρχὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ κειμένου μεταξὺ τῆς καμπύλης τῆς f μὲ

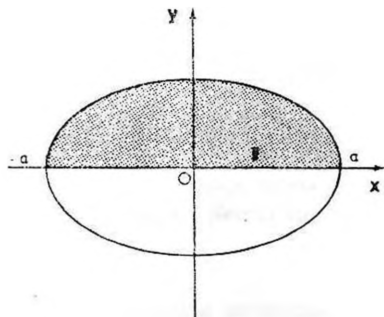
$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad (-\alpha \leq x \leq \alpha) \text{ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.}$$

Ἤτοι : $(E) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha^2\sqrt{1-y^2}\,dy$ μὲ $y = \alpha x$.

Θὰ ἔχωμεν $\alpha\beta\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy = \alpha\beta\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\alpha\beta}{2}$.

(ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον θέμα ἐμβαδοῦ κύκλου).

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως εἶναι : $(E) = \pi\alpha\beta$




**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον :**

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}\ .$$

**1) Νὰ μελετηθῇ καὶ νὰ γίνῃ τὸ διάγραμμα αὐτῆς.**

**2) Δείξατε ὅτι ὑπάρχει πλαγία ἀσύμπτωτος Δ.**

**3) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν E(λ) τοῦ χωρίου τοῦ κειμένου μεταξὺ τῆς καμπύλης, τῆς ἀσυμπτώτου Δ καὶ τῶν παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y μὲ τετμημένας 3 καὶ λ (λ>3).**

**4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.**

Ἀπάντησις. 1) Πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f τὸ $R-\{1\}$. Ἡ παράγωγος τῆς f εἶναι $f'(x) =$
$= 1 + \frac{-8(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^4}$ $\forall x\in R-\{1\}$.

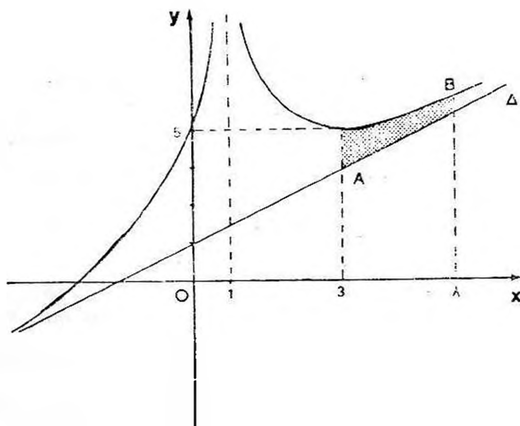
Εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x > 3$ ἢ $x < 1$ καὶ $f'(x) < 0$ διὰ $1 < x < 3$.

Ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα μεταβολῶν.

| x | $-\infty$ | | 1 ‖ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | ‖ | − | \| | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | min 5 | ↗ | $+\infty$ |

2) Ἐπειδὴ $\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$ ἡ εὐθεῖα $x = 1$ εἶναι ἀσύμπτωτος.

Παρατηροῦμεν ὅτι $f(x)-(x+1) = \frac{4}{(x-1)^2}$ καὶ εἶναι $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x-1] = 0$ καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα Δ μὲ ἐξίσωσιν $f(x) = x+1$ εἶναι μία πλαγία ἀσύμπτωτος τῆς f. Ἐπειδὴ δὲ $f(x)-(x+1) > 0$, ἕπεται ὅτι ἡ Δ κεῖται κάτωθεν τοῦ δ διαγράμματος τοῦ f. Τὸ διάγραμμα εἶναι τὸ ἀκόλουθον.




3) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ γραμμοσκιασμένου χωρίου ἔχομεν:

$$E(\lambda) = \int_3^{\lambda}\left(x+1+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx - 4\int_3^{\lambda}(x+1)dx = \int_3^{\lambda}\frac{dx}{(x-1)^2} = 4\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_3^{\lambda} =$$

$$= \frac{-4}{\lambda-1} - \frac{-4}{2} = \frac{-4}{\lambda-1} + 2 = \frac{2\lambda-6}{\lambda-1} \text{ καὶ } \lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = 2.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ** $\int \frac{f(x)\{f'(x)^2\} - f''(x)f^2(x)}{\{f'(x)\}^3}dx$ **ὅπου $f'(x), f''(x)$ ἡ πρώτη καὶ δευτέρα παράγωγος τῆς f ἀντιστοίχως.**

**Ἀπάντησις.** Τὸ ὁλοκλήρωμα γράφεται $\int\frac{f}{f'}dx - \int\frac{f''f^2}{f'^3}dx =$

$$= \int\frac{f}{f'}dx - \int f^2\left(-\frac{1}{2f'^2}\right)'dx = \int\frac{f}{f'}dx + \frac{f^2}{2f'^2} - 2\int\frac{ff'}{2(f')^2}dx = \frac{f^2(x)}{2[f'(x)]^2}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x\text{συν}\alpha+1}}$ **μὲ $\alpha\neq k\pi$, $k\in Z$.**

**Ἀπάντησις.** Εἶναι $x^2-2x\text{συν}\alpha+1 = (x-\text{συν}\alpha)^2-\text{συν}^2\alpha+1 = (x-\text{συν}\alpha)^2+\text{ημ}^2\alpha$ θέτομεν $x-\text{συν}\alpha = |\text{ημ}\alpha|t \Rightarrow dx = |\text{ημ}\alpha|dt$, $(x-\text{συν}\alpha)^2+\text{ημ}^2\alpha = \text{ημ}^2\alpha(1+t^2)$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2\text{συν}\alpha x+1}} = \int\frac{|\text{ημ}\alpha|\,dt}{|\text{ημ}\alpha|\sqrt{t^2+1}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t+t^2}} \text{ καὶ ἂν θέσωμεν καὶ πάλιν}$$

$$\sqrt{1+t^2} = \varphi - t \Rightarrow 1+t^2 = (\varphi-t)^2 \Rightarrow 2\varphi t = \varphi^2-1 \Rightarrow t = \frac{\varphi^2-1}{2\varphi},\ dt =$$

$$= \frac{\varphi^2+1}{2\varphi^2}d\varphi \text{ ὁπότε ἔχομεν: } \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int\frac{\varphi^2+1}{2\varphi^2\,\frac{\varphi^2+1}{2\varphi}}d\varphi = \int\frac{d\varphi}{\varphi} =$$

$$= \log\varphi + c\ _{\varphi=t+\sqrt{1+t^2}} = \left(\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+c\right)_{t=\frac{x-\text{συν}\alpha}{|\text{ημ}\alpha|}} = \log\left[\frac{x-\text{συν}\alpha}{|\text{ημ}\alpha|}\right. +$$

$$+\sqrt{1+\left(\frac{x-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2}\Bigg] + c = \log\left(\frac{x-\sigma\upsilon\nu\alpha+\sqrt{x^2-2x\sigma\upsilon\nu\alpha+1}}{|\eta\mu\alpha|}\right)+c.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα:**

α) $\displaystyle\int \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x^4}{(1+\sigma\upsilon\nu^5 x)^5}\,dx$ β) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-3\sigma\upsilon\nu^2 x+5\eta\mu^2 x}$ .

**Ἀπάντησις.** α) Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι περιττὴ πρὸς ημx, θέτομεν $\sigma\upsilon\nu x = t$, $-\eta\mu x dx = dt$ καὶ λαμβάνομεν: $\displaystyle\int \frac{-t^4\eta\mu x dt}{\eta\mu x(1+t^5)^5} = \int \frac{t^4}{(1+t^5)^5}dt = -\frac{1}{5}\int\frac{d(t^5+1)}{(t^5+1)^5} =$

$$= \frac{1}{20(t^5+1)^4}+c = \frac{1}{20(1+\sigma\upsilon\nu^5 x)^4}+c.$$

β) Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι ἀρτία ὡς πρὸς συνx καὶ ημx, θέτομεν $\varepsilon\varphi x = t \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \tau o\xi_0\varepsilon\varphi t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\eta\mu^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$ καὶ ἔχομεν:

$$\int\frac{dx}{5-3\sigma\upsilon\nu^2 x+5\eta\mu^2 x} = \int\frac{dt}{1+9t^2} = \frac{1}{3}\int\frac{d(3t)}{1+(3t)^2} = \left[\frac{1}{3}\tau o\xi_0\varepsilon\varphi 3t + c\right]_{t=\varepsilon\varphi x} =$$
$$= \frac{1}{3}\tau o\xi_0\varepsilon\varphi(3\varepsilon\varphi x)+c.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:**

α) $\displaystyle\int\frac{\log(x+1)}{x^2}\,dx$ β) $\displaystyle\int e^{-\frac{x}{3}}\eta\mu 2x dx$

**Ἀπάντησις.** α) Εἶναι κατὰ σειρὰν $\displaystyle\int\frac{\log(x+1)}{x^2}dx = \int x^{-2}\log(x+1)dx =$

$$= \int\log(x+1)d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\log(x+1) - \int -\left(-\frac{1}{x}\right)d\log(x+1) = -\frac{\log(x+1)}{x} +$$
$$+\int\frac{1}{x}\frac{1}{x+1}dx = -\frac{\log(x+1)}{x}+\int\frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\log(x+1)}{x}+\int\frac{c_1 dx}{x}+\int\frac{c_2 dx}{x+1},$$ ὅπου

$c_1$, $c_2$ εὑρίσκονται ἐκ τῆς ταυτότητος $\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x+1} \equiv \dfrac{1}{x(x+1)}$ καὶ εἶναι $c_1 = c_2 = -1$

Ὁπότε λαμβάνομεν: $\displaystyle\int\frac{\log(x+1)}{x^2}dx = -\frac{\log(x+1)}{x}+\log x - \log(x+1)+c.$

β) Ἔχομεν $\displaystyle\int e^{-\frac{x}{3}}\eta\mu 2x dx = -3\int e^{-\frac{x}{3}}\eta\mu 2x d\left(-\frac{x}{3}\right) =$

$$-3\int\eta\mu 2x d\left(e^{-\frac{x}{3}}\right) = -3\eta\mu 2x e^{-\frac{x}{3}} + 3\int e^{-\frac{x}{3}}d\eta\mu 2x = -3\eta\mu 2x e^{-\frac{x}{3}} +$$
$$+3\int e^{-\frac{x}{3}}\sigma\upsilon\nu 2x 2dx = -3\eta\mu 2x e^{-\frac{x}{3}} + 6\int e^{-\frac{x}{3}}\sigma\upsilon\nu 2x dx = -3\eta\mu 2x e^{-\frac{x}{3}} -$$
$$-18\int\sigma\upsilon\nu 2x d\left(e^{-\frac{x}{3}}\right) = -3\eta\mu 2x e^{-\frac{x}{3}} - 18\sigma\upsilon\nu 2x e^{-\frac{x}{3}} - 18\int e^{-\frac{x}{3}}\eta\mu 2x 2dx.$$

Ἄρα $\displaystyle 37\int e^{-\frac{x}{3}}\eta\mu 2x dx = -3\eta\mu 2x e^{-\frac{x}{3}} - 18\sigma\upsilon\nu 2x e^{-\frac{x}{3}} \Rightarrow$

$$\int e^{-\frac{x}{3}}\eta\mu 2x dx = -\frac{3}{37}\eta\mu 2x e^{-\frac{x}{3}} - \frac{18}{37}\sigma\upsilon\nu 2x e^{-\frac{x}{3}} = -\frac{3}{37}e^{-\frac{x}{3}}(\eta\mu 2x + 6\sigma\upsilon\nu 2x).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.** Ἐὰν ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $[-\theta, \theta]$ καὶ ἰσχύῃ $f(x) = -f(-x)$ ἀντιστοίχως $f(x) = f(-x)$ $\forall x, -x \in [-\theta, \theta]$ τότε:

1) $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = 0$ ἀντιστοίχως 2) $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = 2\int_{0}^{\theta} f(x)dx$

**Ἀπάντησις.** 1) Εἶναι $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = \int_{-\theta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx.$

Ἔστω τὸ $\int_{-\theta}^{0} f(x)dx$ θέτομεν $x = -t$, $dx = -dt$, $f(x) = f(-t) = -f(t)$ (διότι ἡ f περιττή), ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\int_{-\theta}^{0} f(x)dx = \int_{-\theta}^{0} f(t)dt = \int_{-\theta}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{\theta} f(t)dt = -\int_{0}^{\theta} f(x)dx$$

Ἄρα τελικῶς λαμβάνομεν:

$$\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = \int_{-\theta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx = -\int_{0}^{\theta} f(x)dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx = 0.$$

2) Εἶναι $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = \int_{-\theta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx$ καὶ ἂν θεωρήσωμεν τὸ $\int_{-\theta}^{0} f(x)dx$ μὲ $x = -t \Rightarrow dx = -dt$, $f(x) = f(-t) = f(t)$, ὁπότε $\int_{-\theta}^{0} f(x)dx = -\int_{\theta}^{0} f(t)dt = -\int_{\theta}^{0} f(x)dx.$

Ἄρα τελικῶς λαμβάνομεν: $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = \int_{-\theta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx = -\int_{\theta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx = \int_{0}^{\theta} f(x)dx + \int_{0}^{\theta} f(x)dx = 2\int_{0}^{\theta} f(x)dx.$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim a_\nu$ μέ:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}\left[1 + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{\nu} + \ldots + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\nu-1}{\nu}\pi\right].$$

**Ἀπάντησις.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2\pi x$ μὲ $x = 0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}$, ἡ ὁποία δίδει ὅλους τοὺς ὅρους τῆς $a_\nu | \nu \in N$. Διὰ $\nu \to +\infty$ ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος ὅρος τῆς $a_\nu | \nu \in N$ συγκλίνουν εἰς τὸ 0 καὶ 1 ἀντιστοίχως· διαμερίζομεν ἑπομένως τὸ διάστημα $[0, 1]$ ὡς ἑξῆς: $\Delta_\nu = \left\{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}, 1\right\}$ καὶ σχηματίζομεν τὸ ἐνδιάμεσον ἄθροισμα:

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{\nu}\sigma\upsilon\nu^2 0 + \frac{1}{\nu}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{\nu} + \ldots + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\nu-1}{\nu}\pi$$

Ἐπειδὴ δὲ $\lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sigma\upsilon\nu^2\pi x dx = \int_0^1 \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\pi x}{2}dx = \int_0^1 \frac{dx}{2} + \int_0^1 \frac{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}{2}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\left[\eta\mu 2\pi x\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.** **Θέτομεν** $(1+x)^\nu = c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_\nu x^\nu$ **(1)**

**Προσδιορίσατε τὸ ἄθροισμα** $C_0+\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2+\ldots+\frac{1}{\nu+1}C_\nu=S.$

**Ἀπάντησις.** Ὁλοκληρώνομεν τὴν (1) ἀπὸ 0 ἕως 1 καὶ λαμβάνομεν:

$$\int_0^1(1+x)^\nu dx=\int_0^1(c_0+c_1x^\nu+c_2x^2+\ldots+c_\nu x^\nu)dx \Rightarrow \left[\frac{(1+x)^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1=$$

$$=\left[c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+c_2\frac{x^3}{3}+\ldots+c_\nu\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^{\nu+1}-1}{\nu+1}=c_0+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2+\ldots+\frac{1}{\nu+1}c_\nu=S.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.** **Ἐὰν** $\nu\in N$, **δείξατε ὅτι:** $\frac{1}{\nu+1}\int_\nu^{\nu+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{\nu}$ **συμπεράνατε δὲ ἐξ αὐτοῦ ὅτι τὸ ἄθροισμα** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}$ **κεῖται μεταξὺ** $\log(\nu+1)$ **καὶ** $\log\nu+1$.

**Ἀπάντησις.** Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\forall x\in R$ ἰσχύει $\nu<x<\nu+1$, ἄρα: $\frac{1}{\nu+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\nu}$ καὶ βάσει τῆς προτάσεως (8) τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ἔχομεν

$$\int_\nu^{\nu+1}\frac{1}{\nu+1}dx<\int_\nu^{\nu+1}\frac{1}{x}dx<\int_\nu^{\nu+1}\frac{1}{\nu}\Rightarrow\frac{1}{\nu+1}\int_\nu^{\nu+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{\nu+1} \quad (1).$$

καὶ ἂν στὴν (1) θέσωμεν $\nu=1,2,\ldots,\nu$ λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{2}<\int_1^2\frac{1}{x}dx<\frac{1}{1},\ \frac{1}{3}<\int_2^3\frac{1}{x}dx<\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{\nu}<\int_{\nu-1}^{\nu}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{\nu-1},$$

$$\frac{1}{\nu+1}\int_\nu^{\nu+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{\nu}$$ καὶ διὰ προσθέσεως ἔχομεν:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}<\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\ldots+\int_{\nu-1}^{\nu}\frac{1}{x}dx=\int_1^\nu\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^\nu=$$

$$=\log\nu-\log 1=\log\nu.$$

Ὁμοίως λαμβάνομεν: $\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\ldots+\int_\nu^{\nu+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+$

$$+\frac{1}{\nu}\Rightarrow\int_1^{\nu+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}\Rightarrow\Big[\log x\Big]_1^{\nu+1}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log(\nu+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}.$$

Συνεπῶς ἰσχύει: $\log(\nu+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}<\log\nu+1.$

**Γ** | ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ
ΚΥΚΛΟΣ ΠΡΩΤΟΣ
ΚΥΚΛΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

## Κύκλος πρῶτος

**1.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀκόλουθα ὁλοκληρώματα:

1) $\int \frac{dx}{x^4}$ 2) $\int (2x^4+3x^3-2x+1)dx$

3) $\int (1-x)\sqrt{x}dx$ 4) $\int (3x^2+2)^2dx$

5) $\int (x^2+2)^2 3x^2dx$ 6) $\int \sqrt{x^3+3}\, x^2dx$

7) $\int \frac{8x^2dx}{(x^3+2)^3}$ 8) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+2}}$

9) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$ 10) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x}}$

11) $\int x\sqrt[3]{1-x^2}\, dx$ 12) $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}dx}$

13) $\int \frac{dx}{2x-3}$ 14) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

15) $\int \frac{x+2}{x+1}dx$ 16) $\int \alpha^{2x}dx$

17) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ 18) $\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx$

19) $\int \varepsilon\varphi 2x dx$ 20) $\int \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x dx}dx$

**2.** Ὁμοίως τὰ κάτωθι:

1) $\int e^x\sigma\upsilon\nu e^x dx$ 2) $\int \frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

3) $\int (\varepsilon\varphi 2x+\tau\varepsilon\mu 2x)^2dx$ 4) $\int \frac{dx}{\sigma\tau\varepsilon\mu 2x-\sigma\varphi 2x}$

5) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ 6) $\int \frac{dx}{9x^2-16}$

7) $\int \frac{dx}{x^2+6x+8}$

8) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

9) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$

10) $\int \sqrt{x^2-36}\,dx$

**3.** Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

2) $\int \sqrt{2-3x}\,dx$

3) $\int (1-x^3)^2x^2dx$

4) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

5) $\int e^{4xv}dx$

6) $\int \frac{x^2dx}{1-x^3}$

7) $\int (e^x-x^e)dx$

8) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$

9) $\int \eta\mu 2x dx$

10) $\int \eta\mu\alpha x\sigma\upsilon\nu\alpha x dx$

**4.** Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

1) $\int \frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu 3x}$

2) $\int \frac{dx}{9-x^2}$

3) $\int \sqrt{x^2-8x}\,dx$

4) $\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x+3)(x+2)}$

**5.** Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

1) $\int x^2\log x dx$

2) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

3) $\int x^2 e^{-3x}\,dx$

4) $\int \eta\mu x\eta\mu 3x dx$

5) $\int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x dx$

6) $\int \eta\mu^5 x dx$

7) $\int \sigma\upsilon\nu^5 x dx$

8) $\int \sigma\upsilon\nu 4x\sigma\upsilon\nu 2x dx$

9) $\int \varepsilon\varphi^4 x dx$

10) $\int \varepsilon\varphi^4 3x dx$

**6.** Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

1) $\int \eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$

2) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x dx}{1-\eta\mu x}$

3) $\int x(\sigma\upsilon\nu^3x^2-\eta\mu^3x^2)dx$

4) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^{2/3}\,x dx}{\eta\mu^{2/3}\,x}$

5) $\int \varepsilon\varphi x\sqrt{\tau\varepsilon\mu x}\,dx$

6) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$

**7.** Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

2) $\int \frac{x^2dx}{(4-x^2)^{5/2}}$

3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-16}}$

4) $\int \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^{5/2}}$

5) $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^3}\,dx$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x^2-24x+27)_2}}$

**8.** Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

1) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$

2) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

3) $\int \frac{2x^3dx}{(x^2+1)^2}$

4) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

5) $\int \frac{\eta\mu x dx}{\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)}$

6) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$

**9.** Ὁμοίως τὰ ὁλοκληρώματα :

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$

2) $\int \frac{dx}{1+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$

3) $\int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$

4) $\int \frac{dx}{1+3\sigma\upsilon\nu x}$

5) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

6) $\int \frac{3.2^x-2.3^x}{2^x}\,dx$

7) $\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{x\log x}$

9) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

10) $\int \frac{e^xdx}{e^x+1}$

**10.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα :

1) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

2) $\int (e^{3x}+\sqrt{e^x})\,dx$

3) $\int \frac{ex}{(e^x+\alpha)^\mu}\,dx$

4) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

**11.** Διὰ τῆς παραγοντικῆς μεθόδου νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα :

1) $\int x^\nu \log x dx$

2) $\int x\eta\mu 2x dx$

3) $\int \tau o\xi\eta\mu x dx$

4) $\int x^3\eta\mu x dx$

5) $\int x^2\tau o\xi\eta\mu x d\,x$

6) $\int x^2e^x\eta\mu x dx$

7) $\int xe^x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

8) $\int e^{\frac{x}{3}}\,\sigma\upsilon\nu x dx$

9) $\int (x^3-2x^2+1)e^xdx$

10) $\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$

**12.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ὡρισμένα ὁλοκληρώματα:

1) $\int_1^9 \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}\,dx$ 2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x+e^{2x}}\,dx$

3) $\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\,dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx$

5) $\int_{-1}^1 xe^{x-|x|}\,dx$ 6) $\int_0^3 \frac{\tau o\xi\epsilon\varphi\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

7) $\int_0^1 |x^2-1|\,dx$ 8) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{x+\eta\mu x}\,dx$ 10) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x|\eta\mu x|\,dx$

**13.** Δείξατε ὅτι:

1) $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}$ 2) $0 < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{20+x}\,dx < \frac{1}{20}$

3) $1 \leqq \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^5}\,dx \leqq \frac{7}{6}$ 4) $0 < \int_{\frac{1}{2}}^1 x\eta\mu x\,dx < \frac{7}{24}$

**14.** Δείξατε ὅτι $\forall x \in R^+$ ἰσχύει:

1) $0 < x - \log(x+1) < \frac{x^2}{2}$ 2) $\sigma\upsilon\nu x > 1 - \frac{x^2}{2}$ 3) $x > \eta\mu x > x - \frac{x^3}{3!}$

**15.** Ὁμοίως ὅτι: $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\,dx$.

**16.** Ἀποδείξατε ὅτι ἐὰν α, β∈$R^+$ ἰσχύει: $\int_0^\beta \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+\alpha+x}\,dx > 0$

καὶ κατὰ συνέπειαν ὅτι: $\log(1+\alpha)+\log(1+\beta) > \log(1+\alpha+\beta)$.

**17.** Ὁμοίως ἐὰν $\alpha>0$, $\rho>0$ ἰσχύει: $\int_0^\alpha \rho(1+x)^{\rho-1} - \rho\,dx > 0$ καὶ κατὰ συνέπειαν δείξατε ὅτι: $(1+\alpha)^\rho > 1+\rho\alpha$.

**18.** Ἐὰν α, β, γ∈$R^+$ καὶ $\rho>1$ δείξατε ὅτι:

$\int_\alpha^{\alpha+\beta} [(x+\gamma)^{\rho-1} - x^{\rho-1}]dt > 0$ καὶ συμπερασματικῶς ὅτι: $(\alpha+\beta+\gamma)^\rho + \alpha^\rho > (\alpha+\beta)^\rho + (\alpha+\gamma)^\rho$

**19.** Ἀποδείξατε ὅτι: $\frac{1}{2}\log(\nu-1) + \frac{1}{2}\log\nu < \int_{\nu-1}^{\nu} \log x\,dx < \log\nu$ καὶ συμπερασματικῶς ὅτι:

$$0<\log(\nu!)-\int_1^{\nu}\log x dx<\frac{1}{2}\log\nu$$

**20.** Ἀποδείξατε ὅτι:

1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \eta\mu x dx = \int_0^{2\pi} \eta\mu x dx$ 2) $\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

3) $2^{\nu+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = \pi$ 4) $\int_{-\alpha}^{\alpha} xe^{-x^2}dx = 0$

5) $e^{-1}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<1$ 6) $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$

**21.** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ὅρια ἀκολουθιῶν μὲ τύπους:

1) $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\nu-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\nu-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\nu-\nu^2}}$

2) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\alpha+\frac{2}{\nu}\right)^2+\ldots+\left(\alpha+\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]$

3) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2\nu}$

4) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^2}\left[\sqrt{\nu^2}+\sqrt{\nu^2-1^2}+\ldots+\sqrt{\nu^2-(\nu-1)^2}\right]$

5) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{(\nu+1)^2}+\frac{\nu}{(\nu+2)^2}+\ldots+\frac{\nu}{(2\nu-1)^2}$

6) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\eta\mu\frac{\pi}{\nu}\,\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}\ldots\eta\mu\frac{\nu\pi-\pi}{\nu}}$

7) $\alpha_\nu = \frac{1^k+2^k+\ldots+\nu^k}{\nu^{k+1}}$, $k\in R^+$

8) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)\ldots\left(1+\frac{\nu}{\nu^2}\right)}$

**22.** Ἐὰν ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ εἶναι $f(\alpha+\beta-x)=f(x)$ δείξατε ὅτι:

$$\int_\alpha^\beta xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

**23.** Ἐὰν ἡ f εἶναι περιοδικὴ περιόδου t, ἰσχύει:

$$\int_\alpha^{\alpha+t} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$$

**24.** Μὲ τὸν ὁρισμὸ κατὰ Riemann νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα:

1) $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}dx$ 2) $\int_\alpha^\beta \eta\mu x dx$

3) $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x dx$

4) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x+1}{x} dx \mid \alpha, \beta \neq 0$

5) $\int_{\alpha}^{\beta} \log x dx \mid \alpha, \beta \in R^+$

6) $\int_{\alpha}^{\beta} x^{\lambda} dx$

**25.** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν χωρίων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν κάτωθι καμπύλων:

1) $y = -x^2+9x-14,\ x=3,\ x=5,\ y=0$

2) $y = 4x^2+2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

3) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ y = 0$

4) $y = x^3-3x^2,\ y = 0$

5) $y^2 = 4x,\ y = 2x-4$

6) $x = 8+2y^3-y^2,\ x = 0,\ y = -1,\ y = 3$

7) $y = x\sqrt{1-x},\ y = 0$

8) $y = kx,\ x^2 = ky,\ k \in R$

9) $y^2 = 2x,\ y^2 = -2x+32$

10) $y = -x^3+2x,\ y = x$

11) $x+y = 2,\ y = x,\ y = 0$

12) $y = x^3+2x,\ y = 3x^2$

13) $y^2 = 1+4x,\ y^2 = 1-2x$

14) $y^2= 2x,\ y^2 = 4x - x^2$

## Κύκλος δεύτερος

**26.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀκόλουθα ὡρισμένα ὁλοκληρώματα:

1) $\int_{-1}^{1} (2x^2-x^3)dx$

2) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3) $\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}} dx$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu x dx$

5) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-9}$

6) $\int_{1}^{\rho} \log x dx$

7) $\int_{6}^{2} (x^3+1)x^2 dx$

8) $\int_{0}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2-x^2} dx$

9) $\int_{1-}^{1} x^2 \sqrt{x^2-x^2}\, dx$

10) $\int_{0}^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2} dx$

**27.** Δείξατε ὅτι:

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \eta\mu 2x dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \eta\mu x dx = \pi-2$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta d\theta = \frac{\nu-1}{\nu} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\theta d\theta \Rightarrow I_{\nu} = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$

4) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu}\theta d\theta = \frac{\nu-1}{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu-2}\theta d\theta \Rightarrow I'_{\nu} = \frac{\nu-1}{\nu} I'_{\nu-2}$$

Εἶναι δὲ $I_0 = I'_0 = \frac{\pi}{2}$ καὶ $I_1 = I'_1 = 1$.

Βάσει τούτων δείξατε ὅτι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{2\rho}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{2\rho}\theta d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2\rho-1}{2\rho}\cdot\frac{\pi}{2} \Big| \rho\in N$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{2\rho+1}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{2\rho+1}\theta d\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2\rho}{2\rho+1} \Big| \rho\in N$$

**28.** Θέτομεν $I_{\mu,\nu} = \int \eta\mu^{\mu}\theta\, \sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta d\theta$ μὲ $\mu, \nu\in N$. Δείξατε ὅτι:

$$I_{\mu,\nu} = \frac{\eta\mu^{\mu+1}\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta}{\mu+1} + \frac{\nu-1}{\mu+1} I_{\mu+2,\, \nu-2} \text{ καὶ}$$

$$I_{\mu,\nu} = \frac{\eta\mu^{\mu+1}\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu} I_{\mu,\nu-2} \text{ καὶ}$$

$$I_{\mu,\nu} = \frac{\eta\mu^{\mu-1}\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+1} I_{\mu-2,\, \nu}$$

καὶ ἐκ τούτων ὅτι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\mu}\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta d\theta = \frac{\nu-1}{\mu+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\mu}\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\theta d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\mu}\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta d\theta = \frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\mu-2}\theta\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta d\theta$$

**29.** Ἐὰν $I_{\nu} = \int_0^{\theta} \frac{\eta\mu(2\nu-1)\theta}{\eta\mu\theta} d\theta \,|\, \nu\in N$, δείξατε ὅτι $I_{\nu}-I_{\nu-1} = 0$ καὶ ὅτι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(2\nu-1)\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\pi}{2} \text{ καὶ } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{\nu\pi}{2}$$

**30.** Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῆς καμπύλης μὲ ἐξίσωσιν $y = 4x - x^2$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

**31.** Ὁμοίως διὰ τὴν καμπύλην μὲ ἐξίσωσιν $y = x^2 - 3x + 2$ καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν μὲ ἐξισώσεις $x=1$ καὶ $x = \frac{3}{2}$.

**32.** Ὁμοίως διὰ τὴν καμπύλην μὲ ἐξίσωσιν $y = x^3 + 6x^2 - 7x$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

**33.** Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ μεταξὺ τῆς παραβολῆς $y^2 = 4x$ καὶ τῆς εὐθείας $y = 2x - 4$.

**34.** Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ κειμένου μεταξὺ τῶν δύο παραβολῶν $y = 6x - x^2$ καὶ $y = x^2 - 2x$.

**35.** Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τὸ περικλειόμενον (ἐσωτερικὸν) τῆς γραμμῆς μὲ ἐξίσωσιν $y^2 = x^2 - x^4$.

**36.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροτέρου χωρίου τοῦ κειμένου μεταξὺ τοῦ κύκλου $x^2+y^2 = 25$ καὶ τῆς εὐθείας $x = 3$.

**37.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον $f(x) = συν^2x - συνx \mid x = rad$.

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδον $2\pi$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος αὐτῆς.

3) Νὰ μελετηθῇ ἡ f καὶ νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς μεταξὺ 0 καὶ π.

4) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον τετμημένης $x = \frac{\pi}{2}$.

5) Δείξατε ὅτι ἔχομεν ἀμέσως καὶ τὸ διάγραμμα τῆς f εἰς τὸ $-\pi \leq x \leq 0$, καὶ ἀκολούθως καὶ διὰ x τυχόντα.

6) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ (E) τοῦ χωρίου τοῦ μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y ἀπὸ τὰ σημεῖα μὲ τετμημένας $x = \frac{\pi}{2}$ καὶ $x = \pi$.

7) Ὁμοίως νὰ ὑπολογισθῇ τὸ χωρίον E′ τὸ μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x τοῦ διαγράμματος τῆς f καὶ τῶν τεταγμένων εἰς τὰ σημεῖα μὲ τετμημένας $x = 0$ καὶ $x = \pi$.

**38.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ τύπον $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

1) Νὰ μελετηθῇ καὶ νὰ γίνῃ τὸ διάγραμμα αὐτῆς.

2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ (E) τοῦ χωρίου τοῦ κειμένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x, τοῦ ἄξονος τῶν y, τῆς εὐθείας μὲ ἐξίσωσιν $x = -1$ καὶ τοῦ διαγράμματος τῆς f.

**39.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα :

1) $\int ημ(kx)\, ημ(νx)dx$

2) $\int ημ(kx)\, συνx(νx) \mid dx$

3) $\int συν(kx)\, συν(νx)dx \mid k, ν \in N$.

**40.** Δείξατε ὅτι :

α) $\int \frac{dx}{(\alpha^2 \pm x^2)^\mu} = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{x}{(2\mu-2)(\alpha^2 \pm x^29)^{\mu-1}} + \frac{2\mu-3}{2\mu-2}\int \frac{dx}{(\alpha^2 \pm x^2)^{\mu-1}}\right\}$

β) $\int (\alpha^2 \pm x^2)^\mu dx = \frac{x(\alpha^2 \pm x^2)^\mu}{2\mu+1} + \frac{2\mu\alpha^2}{2\mu+1}\int (\alpha^2 \pm x^2)^{\mu-1} dx$

γ) $\int \frac{dx}{(x^2-\alpha^2)^\mu} = -\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{x}{(2\mu-2)(x^2-\alpha^2)^{\mu-1}} + \frac{2\mu-3}{2\mu-2}\int \frac{dx}{(x^2-\alpha^2)^{\mu-1}}\right\}$

δ) $\int (x^2-\alpha^2)^\mu dx = \frac{x(x^2-\alpha^2)^\mu}{2\mu+1} - \frac{2\mu\alpha^2}{2\mu+1}\int (x^2-\alpha^2)^{\mu-1}dx$

ε) $\int ημx^ν dx = -\frac{ημ^{\mu-1}xσυνx}{\mu} + \frac{\mu-1}{\mu}\int ημ^{\mu-2}xdx \mid \mu \neq 0$

στ) $\int x^\mu e^{x\alpha}dx = \frac{1}{\alpha} x^\mu e^{\alpha x} - \frac{\mu}{\alpha}\int x^{\mu-1}e^{\alpha x}dx \mid \alpha \neq 0$

ζ) $\int συν^{\mu}x dx = \frac{συν^{\mu-1}x ημx}{\mu} + \frac{\mu-1}{\mu}\int συν^{\mu-2}x dx \mid \mu \neq 0$

η) $\int ημ^{\mu}x συν^{\nu}x dx = \frac{ημ^{\mu+1}x\, συν^{\nu-1}x}{\mu+1} + \frac{\nu-\nu}{\mu+\nu}\int ημ^{\mu}x συν^{\nu-2}x dx \mid \mu+\nu \neq 0$

$= -\frac{ημ^{\mu-1}x συν^{\nu+1}x}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int ημ^{\mu-2}x συν^{\nu}x dx \mid \mu+\nu \neq 0$

θ) $\int x^{\mu} ημβx dx = -\frac{x^{\mu}}{\beta} συνβx + \frac{\mu}{\beta}\int x^{\mu-1} συνβx dx \mid \beta \neq 0$

ι) $\int x^{\mu} συνβx dx = \frac{x^{\mu}}{\beta} ημβx - \frac{\mu}{\beta}\int x^{\mu-1} συνβx dx \mid \beta \neq 0$

**41.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι ὁλοκληρωμάτων:

α) $\int_0^x (1+t+t^2)dt$

β) $\int_0^{\sqrt{x}} \log(t^2)dt$

γ) $\int_{-2}^x t^2(t^2+1)dt$

δ) $\int_{-\pi}^x \left| \frac{1}{2} + συν\, t \right| dt$ στὸ $[0, \pi]$

ε) $\int_1^{1-x} (1-2t+3t^2)dt$

στ) $\int_{-1}^{2x} (1+t+t^2)dt$

**42.** Νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας:

$$\int_0^x (t^3-t)dt = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^x (t-t^3)\, dx$$

Ἔστω $f(x) = x-[x]-1/2$ ἂν $x\notin Z$ καὶ $f(x) = 0$ ἂν $x \in Z$. Νὰ προσδιορισθῇ μία νέα συνάρτηση σ(x) τέτοια, ὥστε: $σ(x) = \int_0^x f(t)dt\ \forall x \in R$.

α) Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ f στὸ διάστημα [—3, 3].

β) Δείξατε ὅτι $f(x+1) = f(x)\ \forall x\in R$.

γ) Δείξατε ὅτι $σ(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$ στὸ [0, 1] καὶ ὅτι $σ(x+1) = σ(x)\ \forall x \in [0, 1]$.

δ) Νὰ ἐκφραστῇ ἡ σ(x) συναρτήσει τοῦ [x] ([x] = ἀκέραιον μέρος τοῦ x).

ε) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ σταθερὰ k οὕτως, ὥστε $\int_0^1 (σ(t)+k)dt = 0$.

**43.** Ἐὰν ἡ f εἶναι συνεχὴς στὸ [α, β] καὶ $f(x) \geq 0$, δείξατε ὅτι:

$$H_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f^\nu(x)\, dx}$$

καὶ συμπερασματικῶς ὅτι $\lim_{\nu\to+\infty} H\nu = \max f(x) \mid x\in[\alpha, \beta]$, $\lim_{\nu\to+\infty} H\nu = \min f(x) \mid x\in[\alpha,\beta]$ [?]

**44.** Ἐὰν $\nu \in N$, δείξατε ὅτι : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ συν2νxlogστεμxdx $= \frac{\pi}{4\nu}$.

**45.** Θέτομεν ἐξ ὁρισμοῦ $\log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $\forall x \in R^+$ ἀποδείξατε τότε τὰς ἰδιότητας τοῦ λογαρίθμου.

**46.** Ἐὰν $x = x^2 + \alpha x + \alpha^2$, δείξατε ὅτι :

$$\int \sqrt{x^\nu}\, dx = \frac{2x+\alpha}{2(\nu+1)} x^{\frac{\nu}{2}} + \frac{3\nu\alpha^2}{4(\nu+1)} \int x^{\frac{\nu}{2}-1} dx$$

**47.** Ἐὰν $f(\nu) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}$ εφ$^\nu$xdx, $\nu \geq 1$, δείξατε ὅτι :

α) $f(\nu+1) < f(\nu)$

β) $f(\nu) + f(\nu - 2) = \frac{1}{\nu - 1}$, $\nu \geq 3$.

γ) $\frac{1}{\nu+1} < 2f(\nu) < \frac{1}{\nu-1}$, $\nu \geq 3$

**48.** Ἐὰν $f(\pi) = 2$ καὶ $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]$ημxdx $= 5$, τότε νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $f(0)$.

ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ OFFSET
ΑΤΤΙΚΗ Ε.Ε.
ΑΘΗΝΑΙ Τηλ. 2776669